

THESE

présentée

A LA FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE CLAUDE BERNARD_LYON

pour obtenir

LE DIPLOME DE DOCTEUR_INGENIEUR

par

Aldo TRIBELLINI

Ingénieur INSA

CONTRIBUTION A L'ETUDE DU COUPLE NECESSAIRE A L'AGITATION

D'UN LIT GRANULAIRE DANS UN CYLINDRE HORIZONTAL MUNI

D'UN AGITATEUR A DOUBLE CADRE

Soutenue le 27 Avril 1971 devant la Commission d'Examen

MM. C. EYRAUD

Président

B. LESPINASSE

J.C. CUBAUD

M. RIOU

} Examineurs

LYON

1971

THESE

présentée

A LA FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE CLAUDE BERNARD - LYON

pour obtenir

LE DIPLOME DE DOCTEUR-INGENIEUR

par

Aldo TRIBELLINI

Ingénieur INSA

CONTRIBUTION A L'ETUDE DU COUPLE NECESSAIRE A L'AGITATION

D'UN LIT GRANULAIRE DANS UN CYLINDRE HORIZONTAL MUNI

D'UN AGITATEUR A DOUBLE CADRE

Soutenue le 27 Avril 1971 devant la Commission d'Examen

MM. C. EYRAUD

Président

B. LESPINASSE

J.C. CUBAUD

M. RIOU

} Examineurs

LYON

1971



A mes parents

en témoignage de ma profonde reconnaissance.

A ma femme

A mon fils

A tous ceux qui me sont chers

avec toute mon affection.

UNIVERSITE CLAUDE BERNARD

LYON

Président : M. le Professeur J. BOIDIN

1er Vice-Président : M.R. TOURAINE, Maître de Conférences agrégé

2ème Vice-Président: M.P. PONCET, Maître-Assistant

3ème Vice-Président: M.D. SETTELEN, Etudiant.

UNITES D'ENSEIGNEMENT ET DE RECHERCHE

UNITES

DIRECTEURS

U.E.R. médicale Grange-Blanche

M. le Professeur D. GERMAIN

U.E.R. médicale Alexis-Carrel

M.R. TOURAINE, Maître de Conférence agrégé

U.E.R. médicale LYON-Nord

M. le Professeur A. BERTOYE

U.E.R. médicale LYON-Sud-Ouest

M. le Professeur L. TOLOT

U.E.R. des Sciences pharmaceutiques

M.M. CARRAZ, Maître de Conférences agrégé

U.E.R. des Techniques de Réadaptation

M. le Professeur P. MOUNIER-KUHN

U.E.R. de Biologie humaine

M. J.C. CZYBA, Maître de Conférences agrégé

Institut Régional d'Education Physique
et Sportive

M. J. SAPIN, Professeur E.P.S.

U.E.R. de Mathématiques

M. le Doyen J. BRACONNIER

U.E.R. de Physique

M. le Professeur M. DUFAY

U.E.R. de Chimie et Biochimie

M. le Professeur D. GAUTHERON

U.E.R. des Sciences de la Nature

M. le Professeur L. DAVID

U.E.R. de Biodynamique et
Psychopédagogie

M. le Professeur J. CHANEL

U.E.R. de Physique Nucléaire

M. le Professeur A. SARAZIN

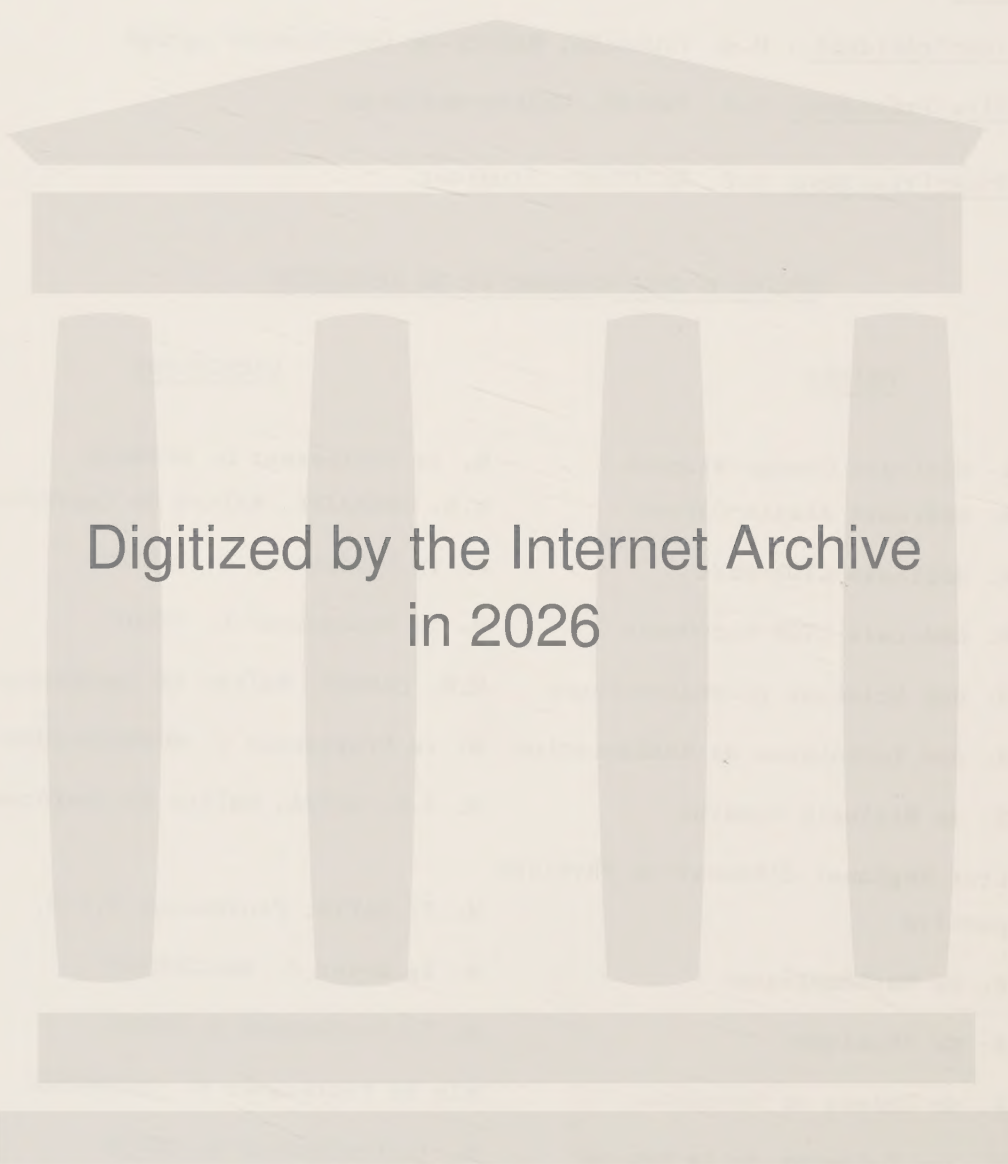
Institut Universitaire de Technologie I M. le Professeur L. FEUVRAIS

Institut Universitaire de Technologie II M. J. GALLET

Observatoire

M. le Professeur J.H. BIGAY

Secrétaire Général : M.N...



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552625_0002

AVANT - PROPOS

Ce travail a été effectué dans le Service de Génie Chimique de l'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES DE LYON.

Nous ne saurions l'exposer sans exprimer notre profonde reconnaissance à Monsieur B. LESPINASSE, Maître de Conférences à l'I.N.S.A. pour les conseils judicieux dont il nous a fait bénéficier et pour l'intérêt constant qu'il n'a cessé de témoigner à nos recherches.

Nous adressons aussi notre vive gratitude à la Société des Produits Chimiques PECHINEY-SAINT-GOBAIN pour l'aide matérielle grâce à laquelle cette étude a été possible ; nous associons à ces remerciements son personnel et plus particulièrement Messieurs M. RIOU, L. VIGLIECCA et D. DEBORD, avec lesquels j'ai eu de fructueuses relations.

Nous sommes très sensible à l'honneur que nous a fait Monsieur le Professeur C. EYRAUD en acceptant de présider notre Jury et nous l'en remercions vivement.

Nos remerciements vont également à Monsieur J.C. CUBAUD, Maître de Conférences à l'I.N.S.A. pour avoir bien voulu examiner ce travail.

Qu'il nous soit permis de remercier Monsieur M. RIOU, Sous-Directeur à la Direction des Recherches de PECHINEY-SAINT-GOBAIN pour avoir accepté de siéger à notre Jury.

Nous ne saurions oublier ici tous nos camarades des Services de Génie Chimique, Génie Civil et Informatique de l'I.N.S.A. de LYON pour leur esprit d'étroite collaboration.

Enfin, que toutes les personnes qui nous ont aidé dans notre travail et tout spécialement Messieurs GUINIOT, LAJUGIE et MARTIN reçoivent l'expression de notre sincère reconnaissance.

- PLAN GENERAL -

INTRODUCTION	p. 1
I RAPPELS DES PROPRIETES DU SOLIDE DIVISE	p. 3
II ETUDE EXPERIMENTALE DES MATERIAUX GRANULAIRES UTILISES	p. 24
III ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE DU MELANGE ET DE L'AGITATION DES SOLIDES DIVISES	p. 50
IV ETUDE EXPERIMENTALE DU COUPLE NECESSAIRE A L'AGITATION	p. 66
V MESURE DE L'AIRE DE CONTACT	P. 118
VI INTERPRETATION DES RESULTATS EXPERIMENTAUX	p. 130
CONCLUSION	p. 161
ANNEXE	p. 164
A : Analogie hydrostatique proposée pour le calcul du couple exercé sur la pale	p. 166
B : Références bibliographiques	p. 176

-:-:-:-

INTRODUCTION

1) BUT DE L'ETUDE

Les opérations qui mettent en oeuvre des solides granulaires sont fréquentes dans l'industrie. Si les problèmes de transport et de stockage commencent à être convenablement résolus puisque l'on sait calculer la forme optimale des trémies de déchargement et des silos (B2, J3, J4, R2), le dimensionnement des réacteurs de traitement (mélangeurs, séchoirs, autoclaves, etc) reste en général empirique (R5, T4). Les données manquent en effet pour évaluer les coefficients de transfert de chaleur et de matière ainsi que la puissance nécessaire à l'agitation de la charge granulaire.

En vue d'apporter une contribution à la résolution de ces problèmes, nous nous sommes proposés d'étudier le couple nécessaire à l'agitation d'un lit granulaire dans un mélangeur cylindrique horizontal muni d'un agitateur à double cadre ; l'étude expérimentale a porté sur l'influence de la vitesse de rotation de l'agitateur, du taux de remplissage, du maître couple des pales et de la dimension des particules constituant la charge ; elle nous a conduit à formuler des relations empiriques permettant de prévoir le couple moyen, le couple au démarrage et le couple maximal sollicitant l'agitateur. Les principaux résultats expérimentaux obtenus ont pu être interprétés par un modèle fondé sur la mécanique des sols.

2) PLAN DE L'EXPOSE

L'exposé débute par une présentation des propriétés des milieux pulvérulents et un rappel des lois fondamentales de la mécanique des sols (Chapitre I).

L'étude expérimentale du milieu granulaire retenu (sphères de verre de différents diamètres) fait l'objet du chapitre II.

Le chapitre III est consacré à une analyse des connaissances actuelles en matière de mélange et d'agitation des solides granulaires : pour illustrer la philosophie que nous adopterons dans l'interprétation de nos propres résultats, nous y avons adjoint une discussion des quelques travaux qui ont introduit la mécanique des sols dans l'étude du comportement des lits agités.

L'étude expérimentale du couple nécessaire à l'agitation du lit fait l'objet du chapitre IV.

Après avoir décrit en détail le dispositif utilisé et analysé les essais préliminaires, nous proposons une méthode basée sur l'analyse dimensionnelle pour dépouiller les mesures du couple moyen. Les équations empiriques issues du dépouillement graphique sont ensuite affinées sur ordinateur par une méthode d'optimisation globale. Des coefficients de sécurité sont introduits pour tenir compte du couple au démarrage et du couple maximal en régime d'agitation. On examine, au chapitre V, les variations de l'aire de contact entre le lit granulaire et la paroi du mélangeur.

Afin de justifier les résultats de notre étude expérimentale, nous développons enfin au chapitre VI un modèle simple de calcul du couple sollicitant l'agitateur. Tenant compte, dans un premier temps de l'action du seul champ de pesanteur, nous établissons des expressions du couple instantané et du couple moyen qui rendent compte de leur variation en fonction du taux de remplissage : le recours à la mécanique des sols nous permet finalement de calculer un coefficient de poussée qui tient convenablement compte du travail des forces de frottement.

CHAPITRE I

RAPPEL DES PROPRIETES DU SOLIDE DIVISE

- SOMMAIRE -

I - 1 INTRODUCTION

I - 2 PROPRIETES DES PARTICULES SOLIDES

I - 2 - 1 Considérations préliminaires, définitions

I - 2 - 2 Paramètres influençant la coulabilité d'un solide

I - 2 - 3 Conclusion

I - 3 DEFINITIONS DES ANGLES CARACTERISTIQUES DES POUDRES

I - 3 - 1 Angles de glissement

I - 3 - 2 Angles de frottement

I - 4 MISE EN OEUVRE DES MATERIAUX GRANULAIRES

I - 4 - 1 Principes fondamentaux de la mécanique des poudres

I - 4 - 2 Eléments de statique du solide divisé

I - 5 LES MATERIAUX COULOMBIENS

I - 5 - 1 Directions de glissement

I - 5 - 2 Etats passif et actif de RANKINE

I - 6 CONCLUSION

- NOTATIONS -

A	Constante d'adhésion du matériau granulaire
C	Constante de cohésion du matériau granulaire
d	Abscisse du centre du cercle de Mohr
r	Rayon du cercle de Mohr
T	Force de cisaillement interne
T_p	Force de cisaillement à la paroi
t	Contrainte de cisaillement
ψ	Angle caractéristique du couple du plan choisi pour la détermination des contraintes
μ	Angle de frottement interne
ϕ	Angle de frottement externe
μ_1	Angle de repos
θ_1	Angle de glissement
Σ	Force normale à la surface de glissement
σ	Contrainte normale au plan considéré
σ_a	Tension interne apparente
σ_T	Tension interne mesurée
σ_1	Contrainte principale majeure dans un lit passif
σ_2	Contrainte principale verticale
σ_3	Contrainte principale mineure dans un lit actif

I - 1 INTRODUCTION

L'étude systématique du comportement des solides divisés ne date que d'une vingtaine d'années. L'examen de la littérature montre que deux philosophies différentes ont été utilisées en vue d'interpréter les phénomènes observés.

(1) La première est basée sur la mécanique des sols bien que cette discipline ne s'intéresse qu'aux phénomènes ayant lieu lors de la rupture du milieu. Malheureusement, dans les appareils servant à mettre en oeuvre les solides granulaires, les trajectoires des particules ne peuvent correspondre aux lignes de glissement définies par les lois qui en résultent, soit parce que le matériau est trop agité, soit parce que les parois ou tout autre obstacle perturbent les champs de forces.

(2) La deuxième procède d'une analogie avec les fluides. Cependant, il faut alors noter, entre les solides divisés et les liquides, les différences fondamentales suivantes :

- les solides sont le siège de tensions internes et la pression varie avec la direction ; les liquides qui sont des milieux isotropes ne présentent pas cette particularité ;

- le solide peut transmettre des forces de frottement en statique ; le fluide ne le peut pas ;

- les contraintes qui se développent lors de la déformation des solides sont, en première approximation, indépendantes de la vitesse de déformation mais dépendent de la pression moyenne à l'intérieur du lit ; dans un liquide, la situation est inversée : les contraintes dépendent de la vitesse mais sont indépendantes de la pression ;

- beaucoup de solides tassés possèdent des forces de cohésion et conservent une forme stable sous une charge : dans certains cas, par arc-boutement des particules, ils peuvent former des voûtes stables au voisinage des orifices de déchargement ; les liquides ne donnent pas lieu à des phénomènes semblables.

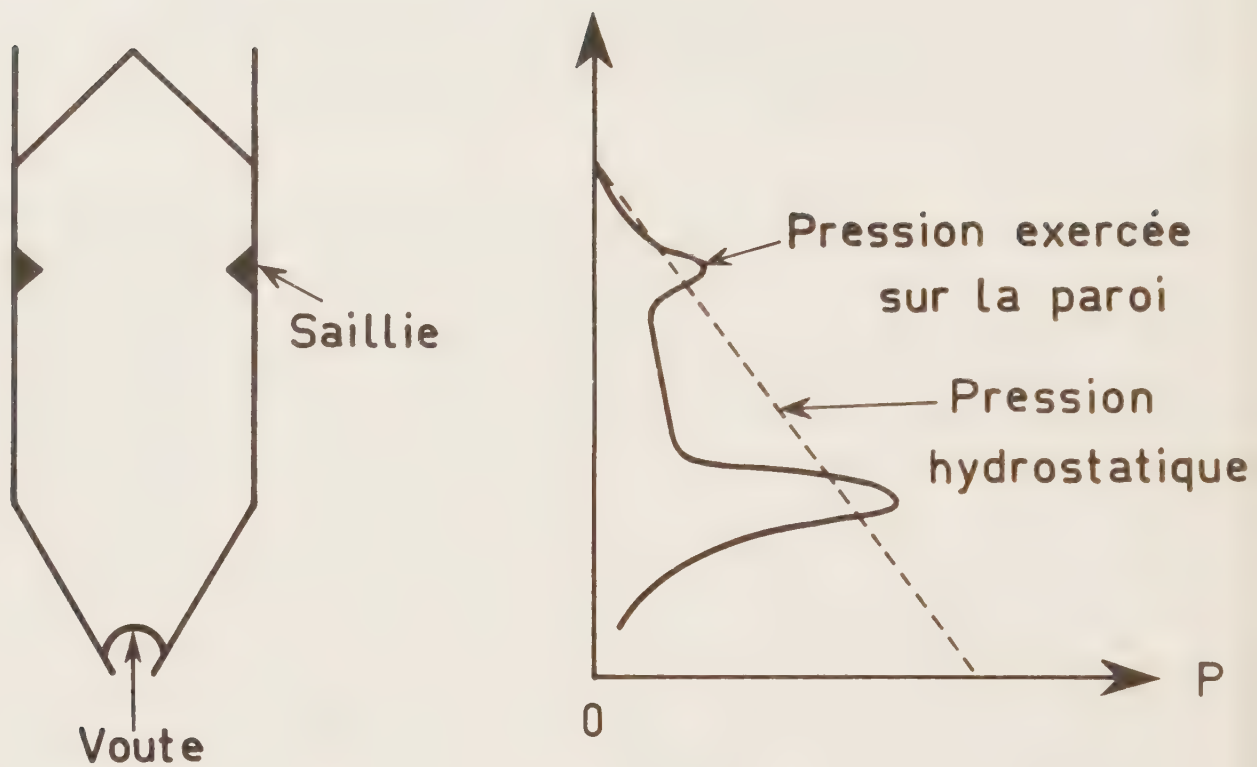


Fig. I-1 Pression statique à la paroi d'un silo à fond conique d'après JENIKE et JOHANSON (J1).

La figure I - 1 illustre ces différences dans le cas d'un silo à fond cône ; on peut remarquer en particulier que la pression exercée perpendiculairement à la paroi est nettement inférieure à la pression hydrostatique sauf lorsque la surface présente une irrégularité $(J - 1) - (W - 1)$.

Ces phénomènes qui résultent des propriétés des particules constituant le solide divisé, peuvent être prévus dès que l'on connaît certaines caractéristiques globales du matériau granulaire.

I - 2 PROPRIETES DES PARTICULES SOLIDES

On conçoit que les propriétés des particules déterminent le comportement du milieu pulvérulent sous l'action du champ de forces auquel il est soumis.

Dans le cas de notre étude expérimentale, il était important de retenir un matériau granulaire dont les propriétés n'évoluent pas au cours du temps. En vue de guider notre choix qui sera justifié au chapitre II, nous examinerons dans ce paragraphe, les principaux paramètres qui influencent une propriété simple mais caractéristique des poudres : l'écoulement sous l'action du seul champ de pesanteur.

I - 2 - 1 Considérations préliminaires, définitions

La manutention d'un solide granulaire est d'autant plus aisée que son comportement se rapproche de celui des liquides. Ainsi, a-t-on l'habitude de faire une distinction subjective entre les matériaux fluides, les matériaux coulables et les matériaux cohésifs en se fondant sur leur aptitude à s'écouler, c'est-à-dire leur coulabilité. L'écoulement du solide divisé peut en effet revêtir les trois aspects suivants :

- un écoulement fluide dans lequel le débit massique est proportionnel à la charge ;

- un écoulement en masse dans lequel le solide s'écoule "en bloc" de telle sorte que seule l'ouverture limite le débit de particules ;

- un écoulement irrégulier avec formation de voûtes instables ou même arrêt de l'écoulement.

Il est évident que l'on peut obtenir un écoulement en masse avec un solide fluide en modifiant la forme de la trémie qui le contient, mais on ne peut avoir l'écoulement fluide avec les matériaux coulables et à plus forte raison avec les matériaux cohésifs.

I - 2 - 2 Paramètres influençant la coulabilité d'un solide granulaire

La coulabilité d'un solide granulaire est affectée par de nombreux paramètres :

a) la surface spécifique de la poudre ; elle joue un rôle prépondérant car les forces superficielles qui lui sont proportionnelles s'opposent à l'action de la pesanteur dans le cas de l'écoulement, ou de l'agitateur dans le cas du mélange ;

b) la taille des particules ; elle est en relation directe avec la surface spécifique, (plus le diamètre équivalent est petit, plus la surface spécifique est grande) ;

c) la masse spécifique ; les valeurs élevées favorisent la fluidité du matériau, car les forces de volume suivent la loi de NEWTON ;

d) les forces de VAN DER WAALS et les forces de frottement mécaniques entre les grains ; dans le cas de particules fines, elles sont responsables de la cohésion du lit et déterminent ses propriétés d'écoulement.

e) l'énergie superficielle, la dureté et le point de fusion ; ces trois variables liées croissent simultanément pour un solide donné ; en particulier un produit dur a une très faible cohésion ;

f) la rugosité et le facteur de forme ; ils influent sur le nombre de contacts interparticulaires. Pour une substance et un diamètre moyen donné, le lit le plus fluide est obtenu avec des sphères lisses ;

g) les forces électriques ; elles peuvent jouer un rôle considérable car les matériaux non conducteurs se chargent électriquement par friction et déformation. Les poudres non métalliques et les oxydes acides se chargent positivement, les métaux et les oxydes basiques négativement. Ce facteur est très important dans le cas des matières plastiques ;

h) l'état physico-chimique de la surface ; il peut être modifié par les phénomènes de sorption, l'oxydation et la décomposition du solide ou, en particulier pour les matériaux à point de fusion faible, par une simple élévation de température ;

i) l'hygroscopicité ; c'est un cas particulier très important du précédent car la tension superficielle de l'eau est très élevée.

I - 2 - 3 Conclusions

Pour qu'un matériau ait une bonne fluidité, il faut qu'il ait une faible activité de surface, une dureté et une densité élevées et qu'il soit constitué de sphères lisses de grandes dimensions.

Au cours du temps, le comportement du lit peut être modifié par l'apparition de liaisons supplémentaires provoquées par l'adsorption de l'humidité atmosphérique pour les matériaux hygroscopiques ou par un ramollissement de la surface des particules sous l'effet d'un échauffement pour les matériaux à point de fusion faible.

Ces paramètres devront être regardés avec une attention particulière lors du choix du matériau granulaire.

I - 3 DEFINITION DES ANGLES CARACTERISTIQUES DES POUDRES

I - 3 - 1 Angles de glissement

Les premiers travaux sur le comportement du lit granulaire ont consisté à étudier leur écoulement sous l'action du seul champ de pesanteur. Les auteurs ont donc été amenés à mesurer différents angles caractérisant le glissement du matériau sur lui-même (angle de repos μ_1) et sur des surfaces solides (angle de glissement ϕ_1).

L'angle de repos μ_1 , souvent appelé angle de talus en mécanique des sols, est l'angle à la base du tas conique que forme le matériau lorsqu'on le dépose à partir d'un orifice sur un plan horizontal. Pour qu'un solide puisse présenter un écoulement fluide, il faut que son angle de repos soit inférieur à 35° .

L'angle de glissement ϕ_1 est l'angle à partir duquel une fine couche de particules s'écoule sur une surface solide inclinable ; il dépend de la rugosité de la surface mais aussi des forces d'adhésion de nature électrostatique et physico-chimique.

I - 3 - 2 Angles de frottements

I-3-2-1 Définition du coefficient de frottement

En mécanique générale, le coefficient de frottement $f = \frac{T}{\Sigma}$ entre deux surfaces est le rapport entre la force T nécessaire pour provoquer le glissement et la force Σ normale au plan de glissement.

I-3-2-2 Lieux de rupture

Dans le cas d'un solide granulaire, portons (fig. I - 2) en fonction de la force Σ normale au plan de glissement, les forces T et T_p nécessaires pour provoquer respectivement :

- le cisaillement du matériau c'est-à-dire le glissement entre deux surfaces constituées de grains,
- le glissement du matériau sur une surface solide.

Les courbes obtenues, dénommées lieux de rupture, présentent généralement, dans le domaine utile des contraintes normales, une partie sensiblement linéaire qui ne passe pas par l'origine : dans ces conditions le coefficient de frottement varie avec la charge. Les ordonnées à l'origine C et A fournissent respectivement une estimation de la cohésion du milieu granulaire et de son adhésion à la paroi considérée.

I-3-2-3 Angles de frottement interne et externe

Par définition, l'angle de frottement interne μ est donné par :

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{dT}{d\Sigma} \quad \text{I - 1}$$

de la même façon, l'angle de frottement externe ϕ est défini par :

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{dT_p}{d\Sigma} \quad \text{I - 2}$$

Les équations des lieux de rupture peuvent alors se mettre sous la forme :

$$T = C + \Sigma \operatorname{tg} \mu \quad \text{I - 3}$$

et

$$T_p = A + \Sigma \operatorname{tg} \phi \quad \text{I - 4}$$

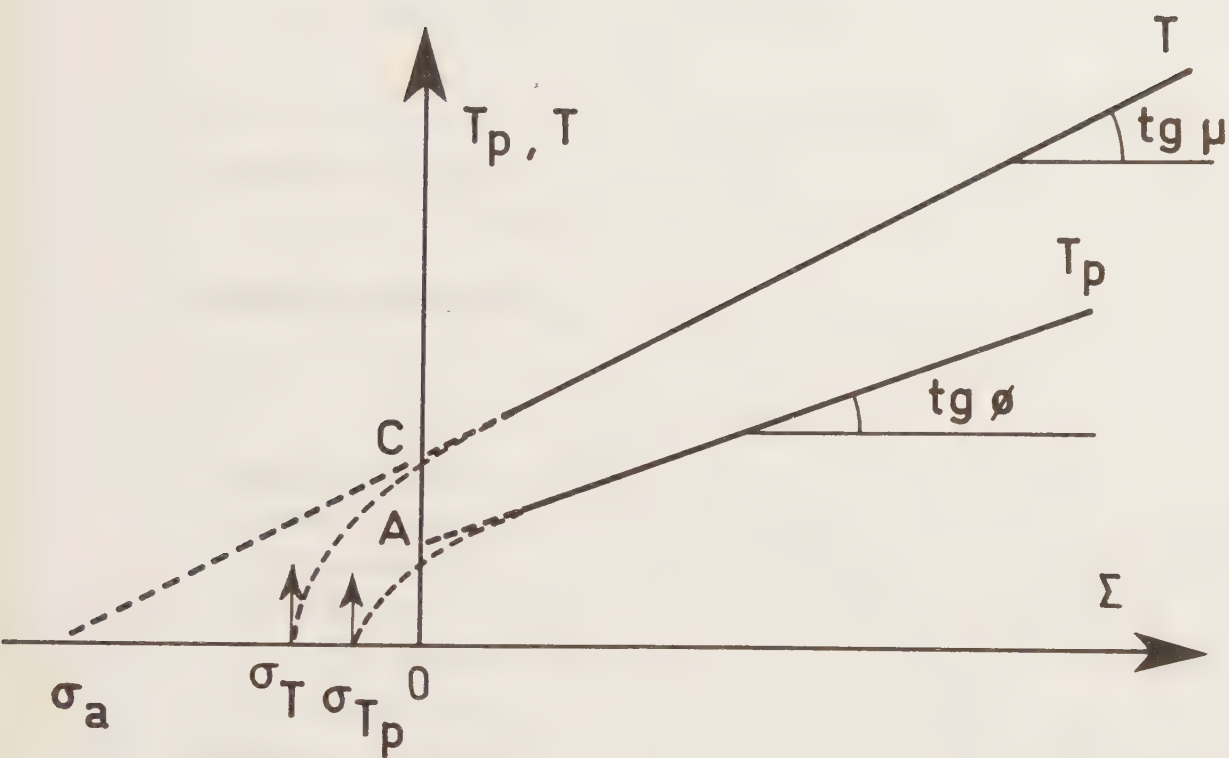


Fig. I - 2 Lieux de rupture d'un matériau granulaire.

L'expérience montre que les angles de repos μ_1 et de glissement ϕ_1 s'identifient aux angles de frottement interne et externe dans le cas de matériaux qui ne possèdent ni cohésion, ni adhésion. La mesure de μ_1 et ϕ_1 fournit alors une méthode rapide pour estimer μ et ϕ .

Il existe d'autres critères pour qualifier les matériaux granulaires (C1), mais leur utilisation concerne des problèmes bien particuliers et leur description sort du cadre de notre propos.

I - 4 MISE EN OEUVRE DES MATERIAUX GRANULAIRES

Nous abordons ici, les phénomènes qui ont lieu à l'intérieur du lit quand il est soumis à des contraintes externes.

I - 4 - 1 Principes fondamentaux de la mécanique des poudres (B-2)

I-4-1-1 Premier Principe

Dans un texte publié en 1885, REYNOLDS a observé qu'"un empilement serré de particules contenu dans une enveloppe flexible augmente de volume lorsqu'on déforme l'enveloppe. Si celle-ci est inextensible, aucune déformation n'est possible tant que les forces appliquées sont insuffisantes pour rompre le contenant ou broyer les particules".

Cette constatation exprime le principe fondamental de la dilatation. En 1931, JENKIN a expliqué ce phénomène en invoquant la formation de contacts "lâches" entre les particules se trouvant auparavant en contact serré.

I-4-1-1 Deuxième Principe

Dans un solide granulaire au repos, la distribution des contraintes est indéterminée : en effet, la force tangentielle entre deux particules peut varier continuellement entre zéro et une valeur maximale qui dépend de la composante normale aux surfaces de contacts. Cette valeur limite n'étant atteinte qu'au moment où les grains commencent juste à glisser l'un par rapport à l'autre, on conçoit que la déformation d'un solide granulaire à partir du repos doive nécessairement se traduire par une modification de la répartition des contraintes ; en particulier, toute surface le long de laquelle la contrainte de cisaillement atteint

sa valeur limite (elle est évidemment donnée par le lieu de rupture) pour la charge appliquée est une surface de glissement : c'est le principe de la contrainte maximale de glissement (Principle of mobilization of friction B2).

I - 4 - 2 Eléments de statique du solide divisé

Les premiers travaux concernant l'influence des forces de frottement et de cohésion sur le comportement des matériaux granulaires sont dûs à COULOMB (C2) et RANKINE (R1). L'étude de ces phénomènes a donné lieu à de nombreux développements théoriques qui constituent la mécanique des sols ; parmi les ouvrages fondamentaux concernant cette discipline, citons en particulier ceux de TERZAGHI (T1, T2), SOKOLOVSKII (S1) et SCOTT (S2).

On se contentera, dans ce paragraphe, de rappeler quelques notions essentielles de mécanique des sols. Certains développements nécessaires à notre étude seront introduits en temps utile.

1-4-2-1 Etude des contraintes

L'action des contraintes en un point P d'un solide granulaire est le plus souvent représentée dans le cas d'un milieu à deux dimensions ; la figure I - 3 montre une section plane dans un tel milieu.

La poudre qui repose à gauche du plan P exerce des forces sur la poudre située à droite ; en chaque point P, la force par unité de surface peut être décomposée en ses composantes : la contrainte normale qui agit perpendiculairement et la contrainte de cisaillement ou de frottement t qui lui est orthogonale. Par convention, les contraintes sont comptées positivement dans le sens de la normale intérieure de façon que les contraintes de compression soient positives ; la direction obtenue en faisant tourner la normale intérieure de $+\frac{\pi}{2}$ définit le sens positif pour les contraintes de cisaillement.

Si, en un point P d'une poudre, on connaît les contraintes σ_{xx} , t_{xy} et σ_{yy} , relatives à deux plans orthogonaux quelconques oy , ox , l'état des contraintes (σ, t) dans un plan π quelconque (figure I - 4) faisant l'angle θ ($\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$) avec ox est entièrement déterminé : en effet, l'écriture de l'équilibre mécanique d'un volume de poudre infiniment petit délimité autour de P par les trois plans considérés

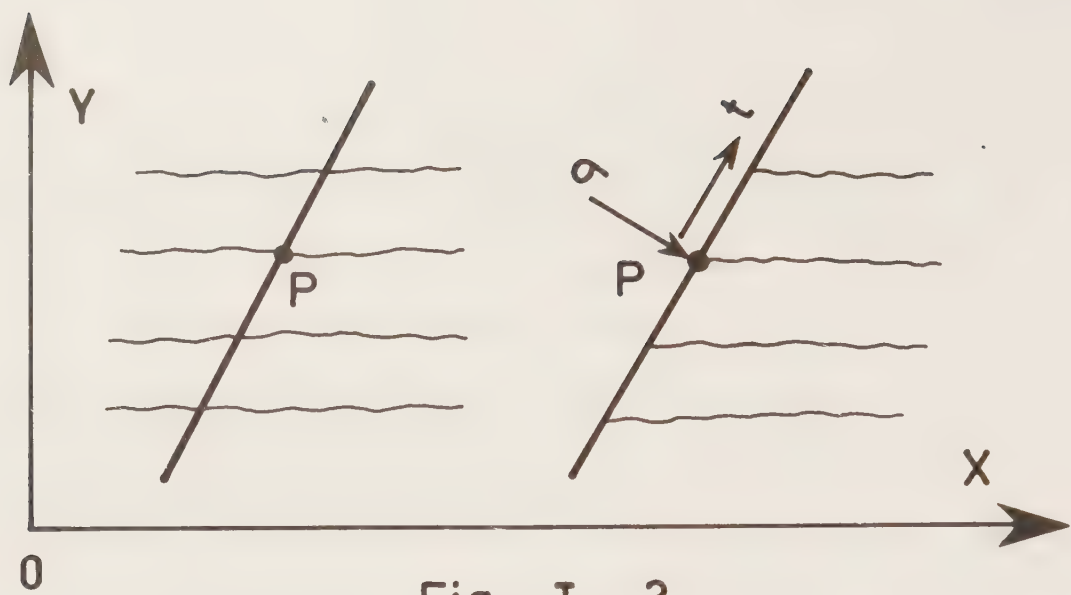


Fig. I - 3

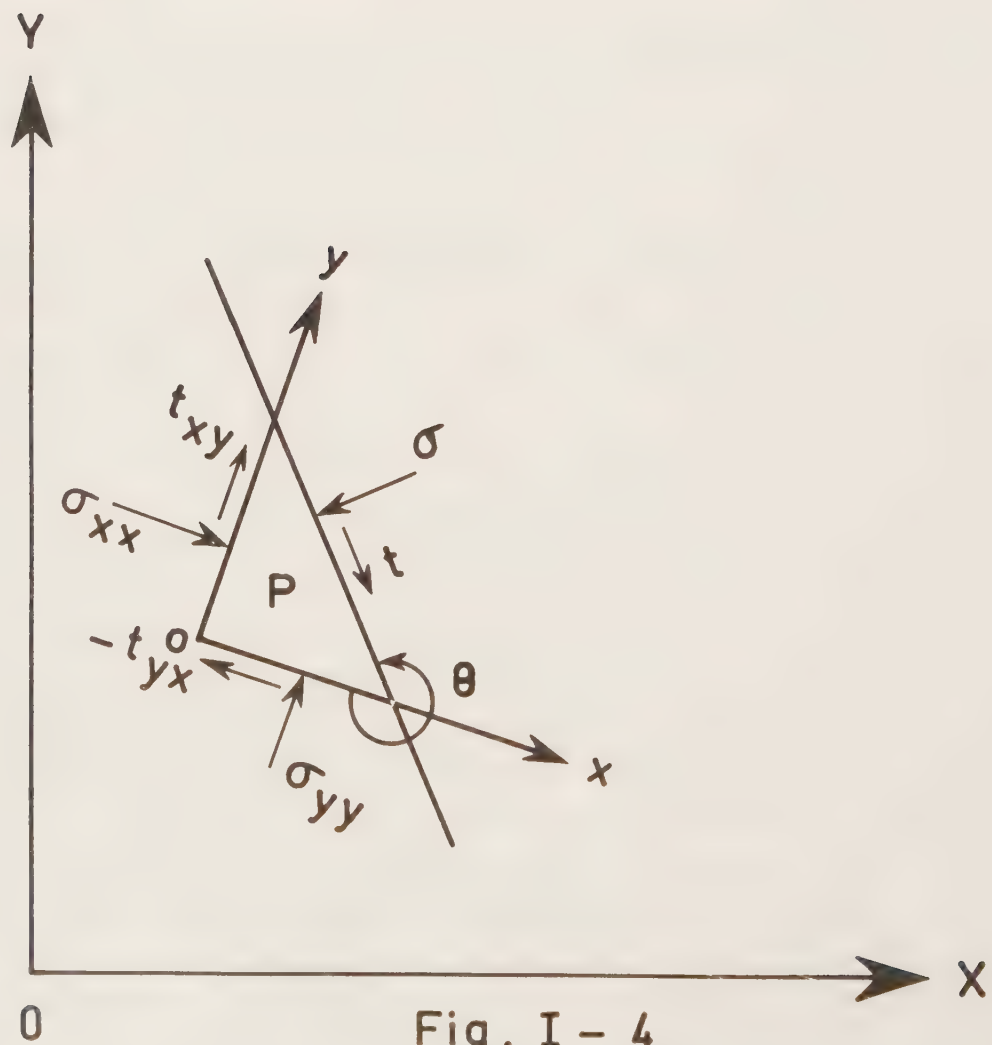


Fig. I - 4

Contrainte normale et contrainte de cisaillement en un point P d'un plan.

(fig I - 4) conduit aux relations classiques :

$$\sigma = \frac{1}{2} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) - \frac{1}{2} (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \cos 2\theta - t_{xy} \sin 2\theta \quad \text{I - 5}$$

$$t = \frac{1}{2} (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \sin 2\theta - t_{xy} \cos 2\theta \quad \text{I - 6}$$

avec $t_{xy} = t_{yx}$

I-4-2-2 Le diagramme du cercle de MOHR

En introduisant les paramètres :

$$r = \left(\frac{1}{4} (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + t_{xy}^2 \right)^{1/2} \quad \text{I - 7}$$

$$d = \frac{1}{2} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad \text{I - 8}$$

qui possèdent la propriété d'être indépendants des directions orthogonales ox et oy choisies et l'angle ψ défini par :

$$\operatorname{tg} 2\psi = \frac{t_{xy}}{\frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})} \quad \text{I - 9}$$

il est aisé de mettre les équations I - 5 et I - 6 sous la forme :

$$\sigma = d - r \cos (2\theta - 2\psi - 2\pi) \quad \text{I - 10}$$

$$t = r \sin (2\theta - 2\psi - 2\pi) \quad \text{I - 11}$$

$$\text{avec } 0 < 2\theta - 2\psi - 2\pi < 2\pi$$

r et d ne dépendant que de l'état de contrainte au point P considéré dans la poudre, les équations I - 10 et I - 11 montrent que les contraintes relatives à un plan π quelconque (il est défini par son angle θ , fig I-4) passant par P sont représentées dans le plan t, σ , par un point du cercle de rayon r et de centre $(0, d)$. Ce cercle est connu sous le nom de cercle de MOHR (fig. I - 5) ; il varie selon le point P considéré puisque l'état des contraintes n'est pas constant dans une poudre.

A chaque plan tel que π correspond donc sur le cercle de MOHR un point dont les coordonnées fournissent la valeur des contraintes σ , t relatives à ce plan. En particulier, les contraintes σ_{xx} , t_{xy} et σ_{yy} , $-t_x$ relatives aux deux plans orthogonaux oy ox , sont les coordonnées de deux points du cercle de MOHR ; pour les obtenir, il suffit dans les équations I - 10 et I - 11 de donner à θ les valeurs $\frac{3\pi}{2}$ (oy) et 2π (ox) ; il vient alors :

$$\sigma_{xx} = d + r \cos 2\psi \quad \text{I - 12}$$

$$t_{xy} = r \sin 2\psi \quad \text{I - 13}$$

$$\sigma_{yy} = d + r \cos (\pi + 2\psi) \quad \text{I - 14}$$

$$-t_{xy} = r \sin (\pi + 2\psi) \quad \text{I - 15}$$

Les équations I - 12 à I - 15 montrent que les points du cercle de MOHR relatifs à deux plans orthogonaux quelconques ox , oy sont diamétralement opposés et que l'angle 2ψ définit entièrement le couple de plans considéré (fig I - 5).

On remarquera enfin, ainsi que le montrent les équations I - 10 et I - 11 qu'une rotation de θ d'un plan dans la poudre entraîne une rotation de -2θ du point homologue sur le cercle de MOHR.

I-4-2-3 Les plans principaux

Par définition, les plans principaux sont des plans le long desquels la contrainte de cisaillement t est nulle. L'examen de la figure I - 5 montre qu'ils correspondent à l'intersection du cercle de MOHR avec l'axe des σ : ce sont donc des plans orthogonaux. Les contraintes de compression correspondantes sont alors appelées contraintes principales ; elles ont pour valeur :

$$\sigma_1 = d + r \quad \text{I - 16}$$

$$\sigma_2 = d - r \quad \text{I - 17}$$

Puisque d et r sont invariants, il en est de même pour σ_1 et σ_2 . On montre facilement que l'orientation des plans principaux

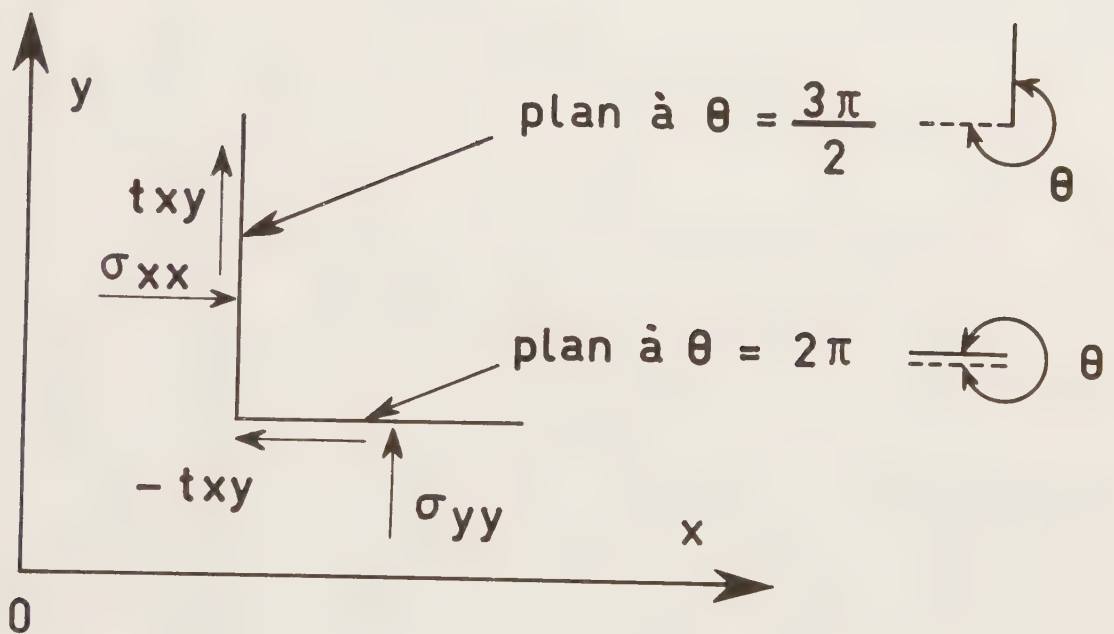
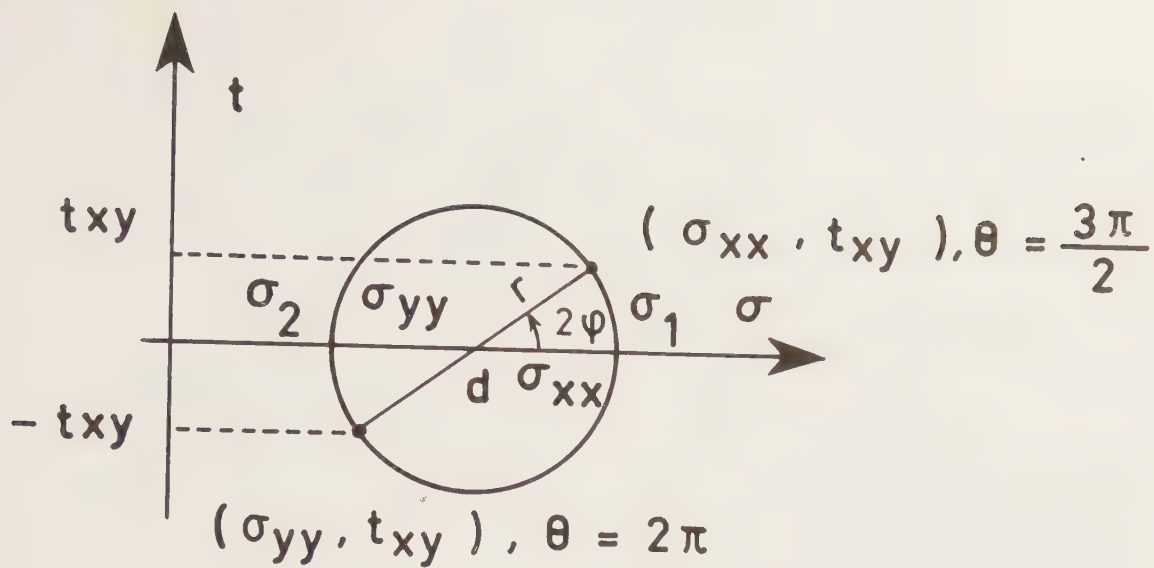


Fig. I - 5 Correspondance entre les points du cercle de Mohr et les plans dans la poudre.

est indépendante du système d'axes de coordonnées choisi. Il en ressort que les plans principaux constituent un système de coordonnées convenable au point P. Malheureusement, dans le cas général, les plans principaux tournent quand P se déplace dans le lit.

I - 5 LES MATERIAUX COULOMBIENS

On a vu au paragraphe I - 3 qu'un matériau granulaire peut être caractérisé par une courbe $T = f(\Sigma)$ ou mieux $t = f(\sigma)$ dénommée courbe intrinsèque ou lieu de rupture qui relie la contrainte de cisaillement t à la valeur de la contrainte normale σ .

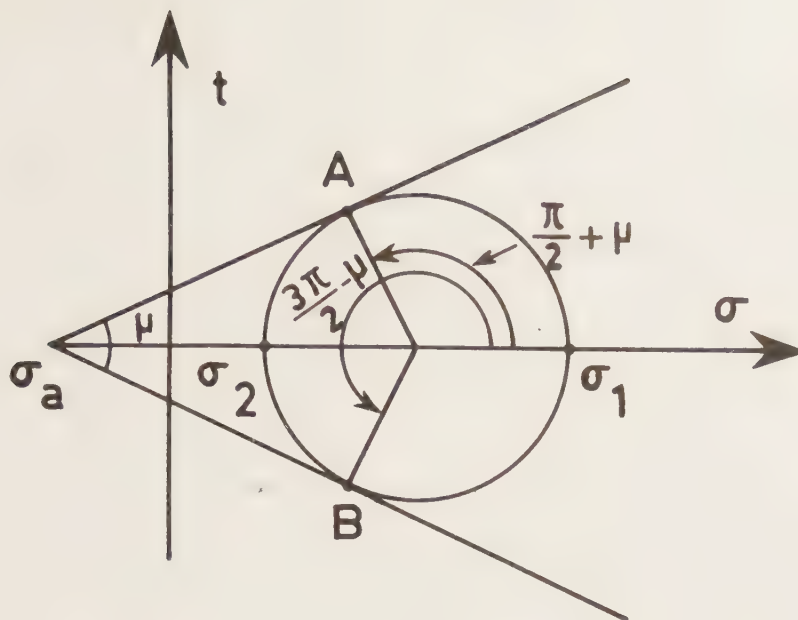
Au moment où la contrainte de cisaillement appliquée atteint cette valeur limite, il apparaît des glissements (§ I - 4 - 2). Les matériaux possédant cette propriété sont appelés plastiques ; s'ils sont en plus inélastiques, on parle de matériaux plastiques rigides. Parmi ces solides divisés, COULOMB a particulièrement étudié ceux dont la courbe intrinsèque est linéaire et qu'on a maintenant l'habitude d'appeler matériaux coulombiens.

I - 5 - 1 Directions de glissement

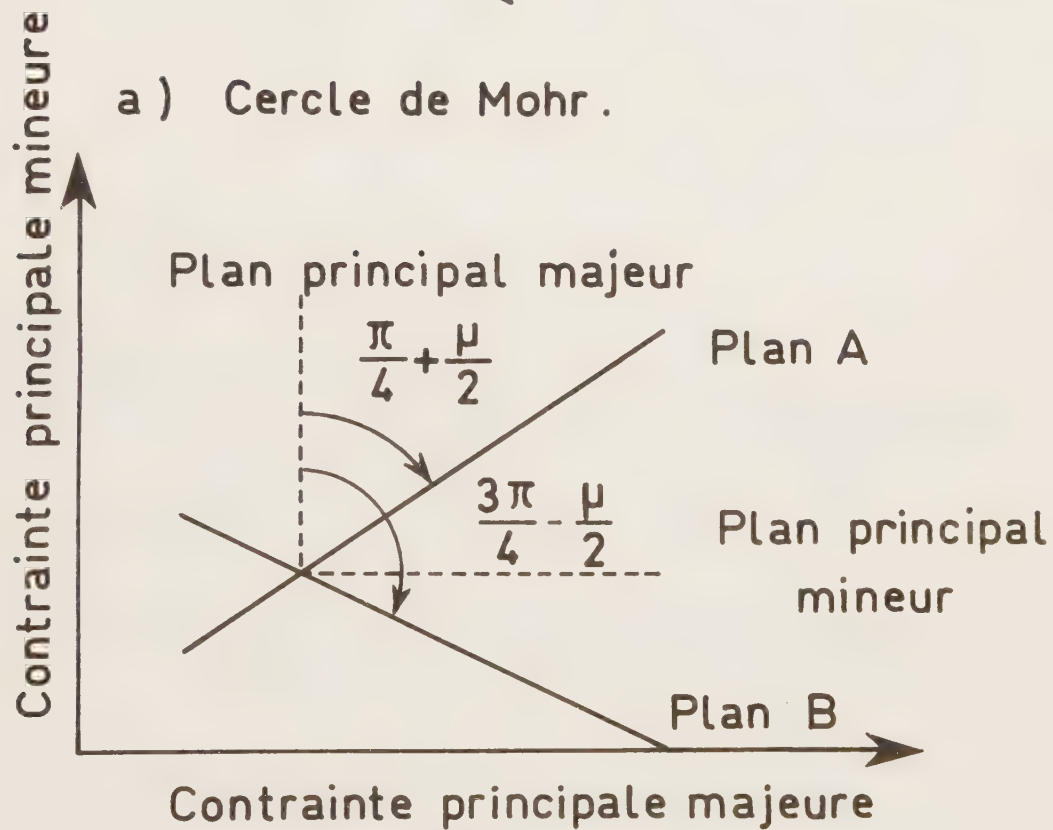
Même pour les matériaux coulombiens, il existe (fig I - 2) une zone pour les très faibles contraintes où la courbe intrinsèque n'est pas linéaire. Ailleurs, ainsi qu'on l'a rappelé au paragraphe I - 3, le lieu de rupture est défini par sa pente $\tan \mu$; son intersection avec l'axe des abscisses σ définit une tension apparente du solide divisé σ_a ; si l'on introduit cette grandeur qui n'a pas de signification physique profonde, l'équation I - 3 de la courbe intrinsèque peut encore de mettre sous la forme :

$$t = (\sigma + \sigma_a) \tan \mu \quad \text{I - 18}$$

Au moment où apparaît le glissement, le cercle de MOHR représentatif des contraintes en un point P de la poudre est évidemment tangent au lieu de rupture (fig. I - 6) : aux points de tangence A et B qui font respectivement les angles $\pi/2 + \mu$ et $3\pi/2 - \mu$ avec le point σ_1 correspondant au plan principal majeur, la contrainte de cisaillement t a atteint sa valeur maximale ; les points A et B sont donc les images des plans de glissement au point P de la poudre.



a) Cercle de Mohr.



b) Plans de glissement.

Fig. I - 6 Directions de glissement dans une poudre en équilibre plastique.

Si l'on se rappelle qu'à une rotation de α dans le diagramme du cercle de MOHR correspond une rotation de $-\frac{\alpha}{2}$ du plan dans la poudre, il en résulte que le plan de glissement relatif à A fait un angle de $-\frac{\pi}{4} + \mu/2$ avec le plan principal majeur homologue de σ_1 ; de la même façon, le plan de glissement relatif au point B fait un angle de $-\frac{3\pi}{4} - \mu/2$ avec le plan principal majeur. Les plans de glissement font donc l'angle $\pm \frac{\pi}{4} - \frac{\mu}{2}$ avec le plan principal mineur, c'est-à-dire avec la direction de la contrainte principale majeure au point considéré de la poudre (fig. I - 6).

On peut finalement montrer à partir de la figure I - 6 que les contraintes principales dans un matériau en équilibre plastique sont reliées par l'équation :

$$\frac{\sigma_2 - \sigma_a}{\sigma_1 - \sigma_a} = \frac{1 - \sin \mu}{1 + \sin \mu} \quad \text{I - 19}$$

I - 5 - 2 Etats passif et actif de RANKINE

Les états passif et actif sont les noms donnés pour les deux états extrêmes d'un matériau granulaire ; ils illustrent l'importance des forces de frottement dans le milieu. On peut les décrire simplement dans le cas des poudres coulombiennes de masse spécifique constante soumises au seul champ de la pesanteur. Supposons un lit horizontal dans lequel il n'existe aucune distorsion et dont l'arrangement est tel que les plans principaux soient horizontaux et verticaux ; ainsi les seules forces de compression du lit sont dues au propre poids du matériau. Il existe alors deux conditions extrêmes provenant de la manière dont le lit subit une contrainte horizontale :

a) La poudre est comprimée horizontalement, si bien que la contrainte majeure principale est horizontale, on obtient alors un état passif (fig. I - 7).

b) La poudre s'étale horizontalement si bien que la contrainte principale horizontale est minimale, on dit alors que la poudre est active.

Si σ_2 est la contrainte principale verticale, l'équation I - 19 devient, ainsi qu'on peut le voir sur la figure I - 8 :

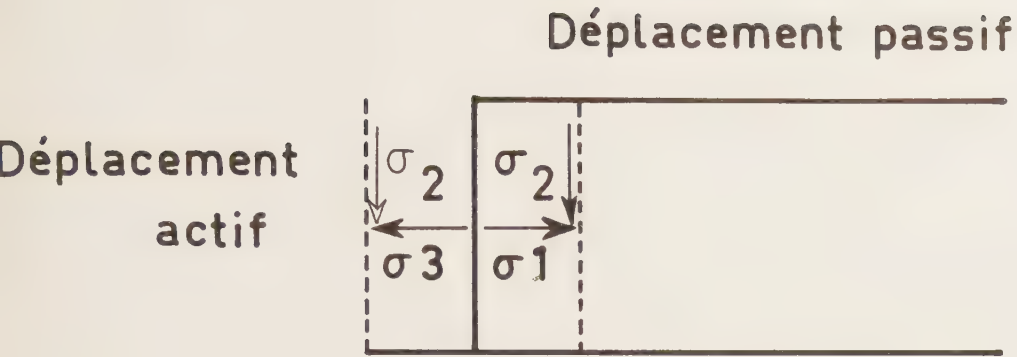


Fig. I - 7

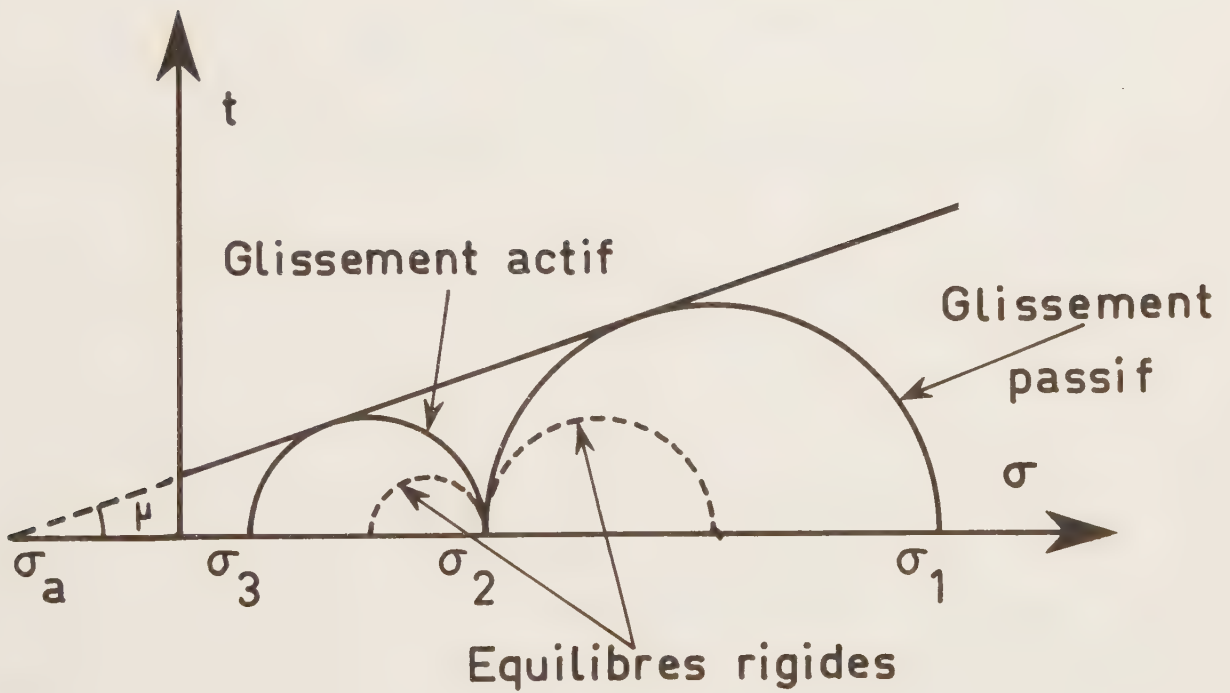


Fig. I - 8

Etats de RANKINE .

$$\text{- pour l'état passif : } \frac{\sigma_1 - \sigma_a}{\sigma_2 - \sigma_a} = \frac{1 + \sin \mu}{1 - \sin \mu} \quad \text{I - 20}$$

σ_1 est la contrainte horizontale du lit passif.

$$\text{- pour l'état actif : } \frac{\sigma_3 - \sigma_a}{\sigma_2 - \sigma_a} = \frac{1 - \sin \mu}{1 + \sin \mu} \quad \text{I - 21}$$

σ_3 est la contrainte horizontale du lit actif.

On notera que $\frac{\sigma_1}{\sigma_3}$ est de l'ordre de dix pour une poudre ayant un angle de frottement interne de 30° ; ceci montre l'importance des frottements dans un lit qui se met en mouvement. Dans un lit au repos, la contrainte horizontale peut prendre n'importe quelle valeur comprise entre ces deux valeurs extrêmes (fig. I - 8).

Les rappels qui viennent d'être faits supposent qu'aucun élément extérieur ne vient perturber le lit infini lors de la mise en mouvement ; les perturbations dues aux écrans présents dans le milieu ont donné lieu à des études particulières qui seront abordées en temps utile.

I - 6 CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous nous sommes contentés de préciser les qualités particulières du solide divisé et les principales méthodes d'approche de leur étude.

Il sort de notre propos de traiter l'étude des récipients de stockage, ainsi que la décharge des trémies ; on se reportera pour ces problèmes aux travaux de REIMBERT et REIMBERT (R2) pour la première partie et à ceux de BROWN et RICHARDS (B2) et de GARDNER (G1 - G2) en ce qui concerne l'écoulement dans les trémies ; des études complémentaires faisant intervenir l'influence du gaz interstitiel lors de la décharge des récipients ont été faites par MAC DOUGALL (M1) et SHOOK et ses collaborateurs (S5).

L'agitation des matériaux granulaires fait également intervenir les forces de frottement entre les particules ; notre but sera d'en déterminer l'influence dans le cas particulier d'un mélangeur cylindrique horizontal avec agitateur du type double cadre. Mais auparavant, il est nécessaire de mesurer les caractéristiques du solide divisé que nous venons de définir.

CHAPITRE II

ETUDE EXPERIMENTALE DES MATERIAUX GRANULAIRES UTILISES

- SOMMAIRE -

II - 1 CHOIX DU MATERIAU GRANULAIRE

II - 2 MESURES DES PROPRIETES STATIQUES

II - 2 - 1 Propriétés géométriques

II - 2 - 2 Mesure des angles statiques

II - 3 PROPRIETES DYNAMIQUES

II - 3 - 1 Angle de repos dynamique

II - 3 - 2 Angle de frottement interne

II - 3 - 3 Angle de frottement externe

II - 4 CONCLUSION

- NOTATIONS -

A	Constante d'adhésion du matériau granulaire
a	Aire de la surface de glissement
C	Constante de cohésion du matériau granulaire
dp	Diamètre des particules
e	Rugosité de la surface de glissement
f	Facteur de forme
g	Accélération de la pesanteur
m	Masse de matériau déposé sur la surface de glissement
n	Module des tamis dans l'échelle de RENARD
T	Force de cisaillement à l'intérieur du lit
T_p	Force de frottement à la surface du solide étudié
t	Contrainte de cisaillement
ϵ	Porosité du lit
ρ	Masse spécifique apparente du lit
ρ_p	Masse spécifique des particules
ρ_{eau}	Masse spécifique de l'eau
μ	Angle de frottement interne
ϕ	Angle de frottement externe
μ_1	Angle de repos
ϕ_1	Angle de glissement
θ	Angle d'inclinaison de la surface par rapport à l'horizontale
Σ	Force normale à la surface de rupture
σ	Contrainte normale

II - 1 CHOIX DU MATERIAU GRANULAIRE

Parmi les paramètres susceptibles de modifier le couple nécessaire à l'agitation de notre mélangeur d'axe horizontal, il était intéressant d'examiner l'influence des particules elles-mêmes. Afin de limiter notre étude, nous avons choisi d'examiner le rôle du diamètre dans le cas de particules sphériques de dimension uniforme : en effet, la plupart des solides pulvérulents mis en oeuvre dans les réacteurs industriels ont un facteur de forme voisin de l'unité ; c'est en particulier le cas de beaucoup de polymères en grains. Afin d'éviter les phénomènes parasites évoqués au paragraphe I - 2, il nous a paru préférable d'utiliser un matériau ayant une dureté élevée et une grande inertie chimique.

Notre choix s'est finalement porté sur des billes de verre de fabrication industrielle ; le matériau brut a été soumis à un tamisage prolongé afin d'éliminer les fines et de resserrer la granulométrie.

Les diamètres extrêmes dans chacun des lots utilisés sont fixés par les dimensions de deux tamis consécutifs dans l'échelle de RENARD.

Rappelons que dans l'échelle de RENARD, le module n (entier) d'un tamis est relié au diamètre d_p (en microns) des particules juste refusées par la relation :

$$n = 1 + 10 \log_{10} d_p \quad \text{II - 1}$$

Pour des tamis consécutifs de modules n et $n + 1$, on a donc :

$$\frac{d_{p \text{ max}}}{d_{p \text{ min}}} = \sqrt[10]{10} = 1,259 \quad \text{II - 2}$$

Dans tout ce qui va suivre, on caractérisera la dimension des billes de chaque lot par le diamètre correspondant du tamis supérieur c'est-à-dire par le diamètre maximal. Les dimensions retenues sont les suivantes : 0,08 ; 0,2 ; 1 et 3 mm.

Par examen microscopique, on a vérifié que les billes les plus petites sont très sensiblement sphériques : nous admettrons que pour tous les lots utilisés le facteur de forme est égal à l'unité.

But des mesures effectuées :

Nous nous proposons dans ce chapitre d'examiner l'influence de la taille des particules sur les caractéristiques propres du matériau granulaire. Nous nous bornerons évidemment à la mesure des paramètres susceptibles d'influencer la grandeur des forces mises en jeu lors de l'agitation du lit.

II - 2 MESURES DES PROPRIETES STATIQUES D'UN LIT GRANULAIRE

Les propriétés d'une poudre sont déterminées par celles des particules individuelles, par la manière dont elles réagissent les unes sur les autres, enfin par les propriétés du fluide remplissant les interstices. Néanmoins, il est préférable de traiter le solide divisé comme une entité possédant ses caractéristiques propres, au repos comme en mouvement.

II - 2 - 1 Propriétés géométriques

Ce sont essentiellement, la masse spécifique apparente du solide divisé et la porosité de l'empilement. Ces deux paramètres sont d'ailleurs liés.

La connaissance de la masse spécifique apparente intervient comme on le verra aux chapitres IV et VI dans le dépouillement des résultats expérimentaux ; il nous a semblé intéressant d'examiner également l'influence de la taille des particules sur la porosité de manière à mettre en évidence l'accroissement des interactions entre particules quand le diamètre décroît.

Les résultats expérimentaux sont consignés dans le tableau II - 1. On remarquera que la diminution du diamètre influe peu sur la porosité, ce qui permet de penser que les forces interparticulaires donc les tensions de cohésion restent faibles même pour les billes de 0,08 mm. La valeur de la porosité obtenue est conforme aux résultats de SCOTT (S3, S4) et BROWN et RICHARDS (B2).

Diamètre des billes en mm	Masse spécifique du verre en g/cm ³	Masse spécifique apparente en g/cm ³	Compacité 1 - ε
0,08	2,99	1,74	0,605
0,2	2,77	1,67	0,605
1	2,64	1,63	0,62
3	2,5	1,58	0,635

TABLEAU II - 1

On constate que la densité du verre constituant les billes augmente quand la taille des particules diminue ; cette évolution est due aux charges ajoutées au verre en fusion de manière à faire varier sa fluidité avant le passage dans la buse pour la fabrication des sphères.

II - 2 - 2 Mesure des angles statiques

On abordera uniquement dans cet exposé la mesure de l'angle de repos μ_1 et de l'angle de glissement ϕ_1 , car ils mettent en évidence, par comparaison aux angles de frottement correspondants, l'existence de liaisons entre les particules dans le matériau au repos, et déterminent au moins pour le premier, la forme du lit dans le mélangeur.

II-2-2-a Mesure de l'angle de repos μ_1

Les auteurs ont l'habitude de distinguer plusieurs angles de repos, l'angle statique proprement dit, l'angle drainé et l'angle dynamique ; nous reparlerons de ce dernier au paragraphe suivant.

1) L'angle de repos statique

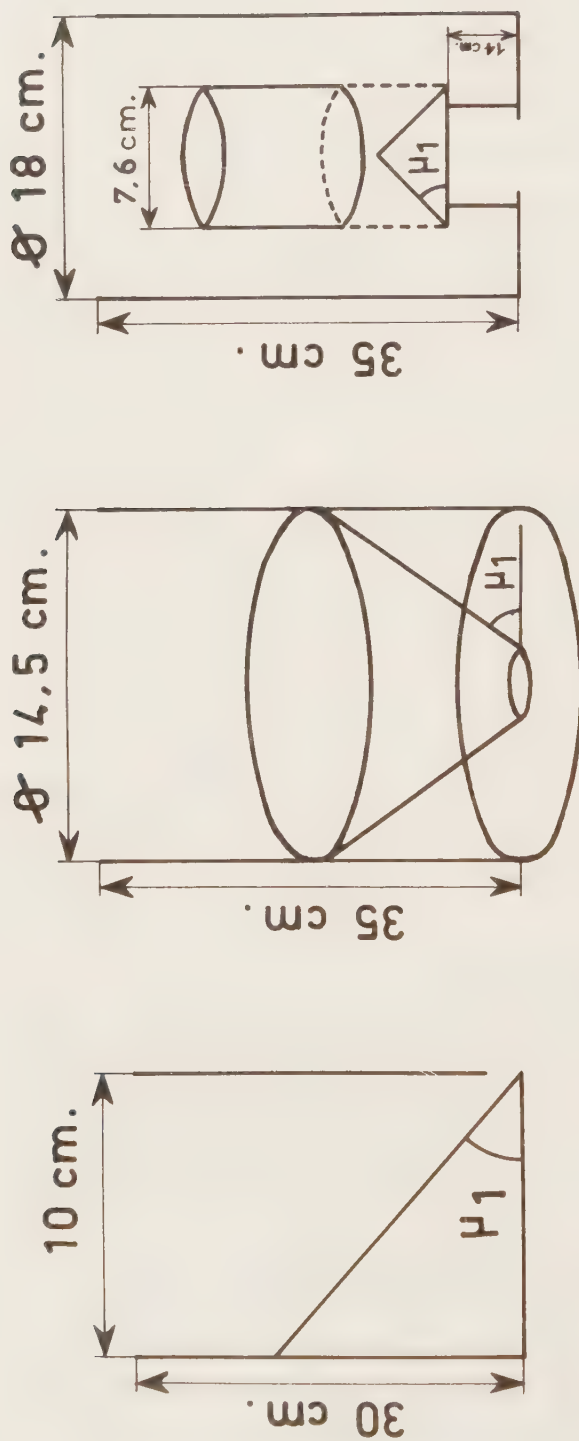
Il a été défini au paragraphe I - 3. Une étude complète des méthodes de mesure a été faite par TRAIN (T3) ; c'est l'angle à la base d'un cône construit sur un plan horizontal de surface donnée ou d'un cône de hauteur constante ; c'est également l'angle que fait avec l'horizontale un bac inclinable rempli de particules quand le matériau qu'il contient commence à s'écouler.

2) L'angle de repos drainé

C'est l'angle obtenu après écoulement d'un empilement de particules par un orifice. La figure II - 1 montre les différents appareillages utilisés pour sa mesure ; les valeurs obtenues avec ces appareils sont sensiblement divergentes dès que le matériau ne donne pas lieu à un écoulement fluide (cf. § I - 2).

3) Justification de ces différentes méthodes

La multiplicité des méthodes de mesure de l'angle de repos montre que cette grandeur est difficilement mesurable car elle est la manifestation de phénomènes très complexes dont les mécanismes d'action à l'échelle macroscopique ne sont pas encore bien compris.



a) Talus b) Cratère c) Cône circulaire

Fig. II-1 Appareillage de mesure de l'angle de repos drainé .

Il apparaît souvent qu'une méthode de mesure donne des résultats satisfaisants et reproductibles pour un matériau, mais conduit à des résultats erronés ou très dispersés pour un autre. Par exemple, les matériaux cohésifs présentent souvent une "cheminée" au voisinage de l'ouverture et l'angle du cratère est alors difficilement accessible.

CRAIK et MILLER (C5) ont montré que les mesures par la méthode du cône sont peu reproductibles $\frac{\Delta\mu}{\mu} \sim 20\%$ dès que les angles de repos sont relativement élevés.

4) Résultats de la littérature

Certains auteurs (P2, H1, J2) ont essayé de relier empiriquement l'angle de repos à la dimension des billes. Si, pour les produits utilisés par PILPEL (fig. II-2), on peut trouver une équation simple reliant ces deux paramètres, des études analogues faites par ROSE et TANAKA (R3) sur du sable siliceux et par d'autres auteurs (B2) sur des matériaux divers ont montré que l'influence de la taille des particules varie beaucoup et de façon complexe avec leur nature et leur facteur de forme.

5) Résultats expérimentaux

Les mesures des angles de repos ont été faites à l'aide d'un bac inclinable dont la surface de base est constituée d'une plaque de 17 cm x 51 cm sur laquelle ont été collées des billes de la granulométrie étudiée.

Le bac est recouvert d'une couche mince d'épaisseur uniforme de manière que la surface supérieure du lit soit parallèle à la base. La méthode de mesure consiste à incliner progressivement le bac jusqu'à ce que la moitié des billes se soit mise à glisser : en effet, on ne mesure pas l'angle au moment où les premières billes s'écoulent car ce phénomène peut provenir d'une vibration mécanique de l'ensemble ou des contraintes de distorsion dans le lit.

Nos billes de verre n'étant pas cohésives, nous avons obtenu une très bonne reproductibilité pour nos mesures comme le montre le tableau II - 2 :

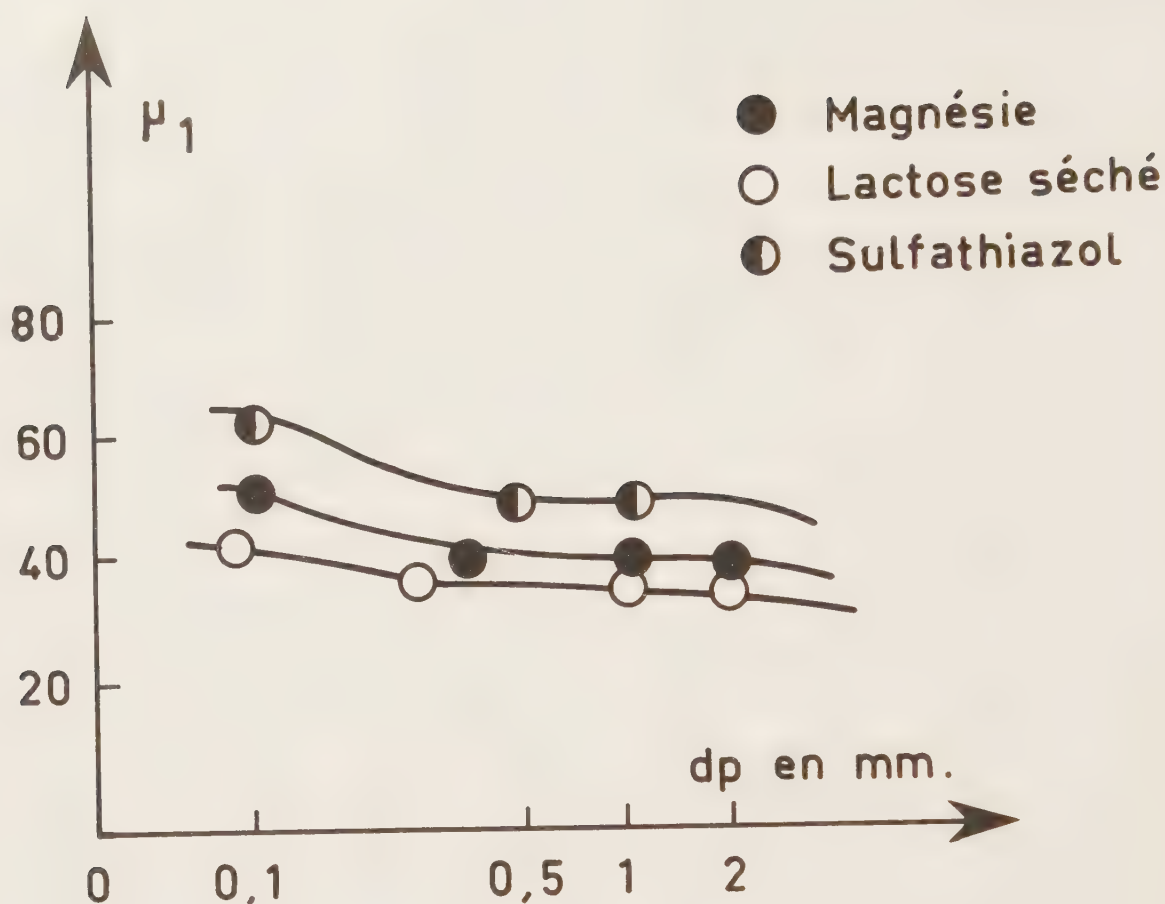


Fig. II-2 Influence du diamètre des particules sur l'angle de repos d'après PILPEL (J - 2).

Diamètre des billes en mm	Angle de repos μ_1
0,08	32°5 ± 1°5
0,2	25°4 ± 1°5
1	26°5 ± 1°
3	27°5 ± 1°

TABEAU II - 2

Les valeurs obtenues sont en bon accord avec celles de BROWN (B1), NOVOSAD (N1) et TRAIN (T3) pour des billes sphériques d'autres matériaux durs ; on peut constater que l'angle de repos varie peu avec le diamètre dans le domaine étudié.

Comme on peut considérer que les forces de liaison entre les particules sont négligeables vis-à-vis des forces de pesanteur pour les billes sphériques de 3 mm, on est amené à penser que ces forces sont toujours très faibles pour toutes les autres granulométries de billes, sauf peut-être pour celles de 0,08 mm.

II-2-2-b Mesure de l'angle de glissement ϕ_1

1) Bibliographie

La mesure de l'angle de glissement est délicate car les phénomènes parasites provenant de l'humidité atmosphérique ou de la polarisation accidentelle de la surface jouent un rôle prépondérant ; par ailleurs, il est recommandé (F1), pour obtenir des mesures reproductibles, d'utiliser une très fine couche de billes ; en effet, si l'épaisseur de la couche est trop importante, on obtient un angle compris entre les angles de repos et de glissement.

Quelques auteurs (J2, F1) ont étudié l'influence du diamètre des particules sur l'angle de glissement : on observe généralement (fig. II - 3) que les particules de taille inférieure à 100 microns adhèrent fortement à la paroi.

La rugosité de la surface joue également un grand rôle : FOWLER et CHODZIESNER ont constaté que lorsqu'elle devient égale ou supérieure au diamètre moyen des billes, l'angle de glissement est égal à l'angle de repos. Ils proposent l'équation empirique suivante :

$$\operatorname{tg} \phi_1 = \frac{0,211}{f^2} + 0,344 - \frac{e^{0,5}}{dp} \frac{\rho_p}{\rho_{\text{eau}}} + 0,183 \quad \text{II - 3}$$

dans laquelle :

f est le facteur de forme des particules $0,67 < f < 1$,

e la rugosité de la surface : $0,27 \text{ mm} < e < 3,1 \text{ mm}$,

ρ_p la masse spécifique des particules : $1,1 < \rho_p < 11,3 \text{ g/cm}^3$,

ρ_{eau} la masse spécifique de l'eau : 1 g/cm^3 et $0,27 \text{ mm} < dp < 4 \text{ mm}$.

On remarque que l'angle de glissement sur une surface lisse ($e = 0$) ne dépend pas de la taille des particules. Ce résultat n'est pas en désaccord avec ceux de JONES et PILPEL (J2) qui observent (fig. II - 3) un palier pour $dp > 0,5 \text{ mm}$.

2) Résultats expérimentaux

La mesure de l'angle de glissement a été effectuée à l'aide de l'appareillage décrit pour la mesure de l'angle de repos en remplaçant le fond du bac par une plaque lisse du matériau étudié. On a examiné le glissement sur deux matériaux : l'acier inoxydable puis le polychlorure de vinyle. Les résultats expérimentaux relatifs aux billes non séchées et séchées sous vide sont consignées sur le tableau II - 3 ; chaque valeur est la moyenne de trois mesures dont la reproductibilité est de l'ordre du degré sauf pour les billes de $0,08 \text{ mm}$ pour lesquelles la précision est de l'ordre de 3° .

Surface dp mm	Conditions ambiantes		Billes séchées sous vide
	P.C.V.	Inox.	P.C.V.
0,08	49°	39°2	34°5
0,2	29°6	19°8	14°5
0,5	8°7	9°6	6°2
1	8°5	8°4	6°
3	5°8	5°8	5°8

TABEAU II - 3

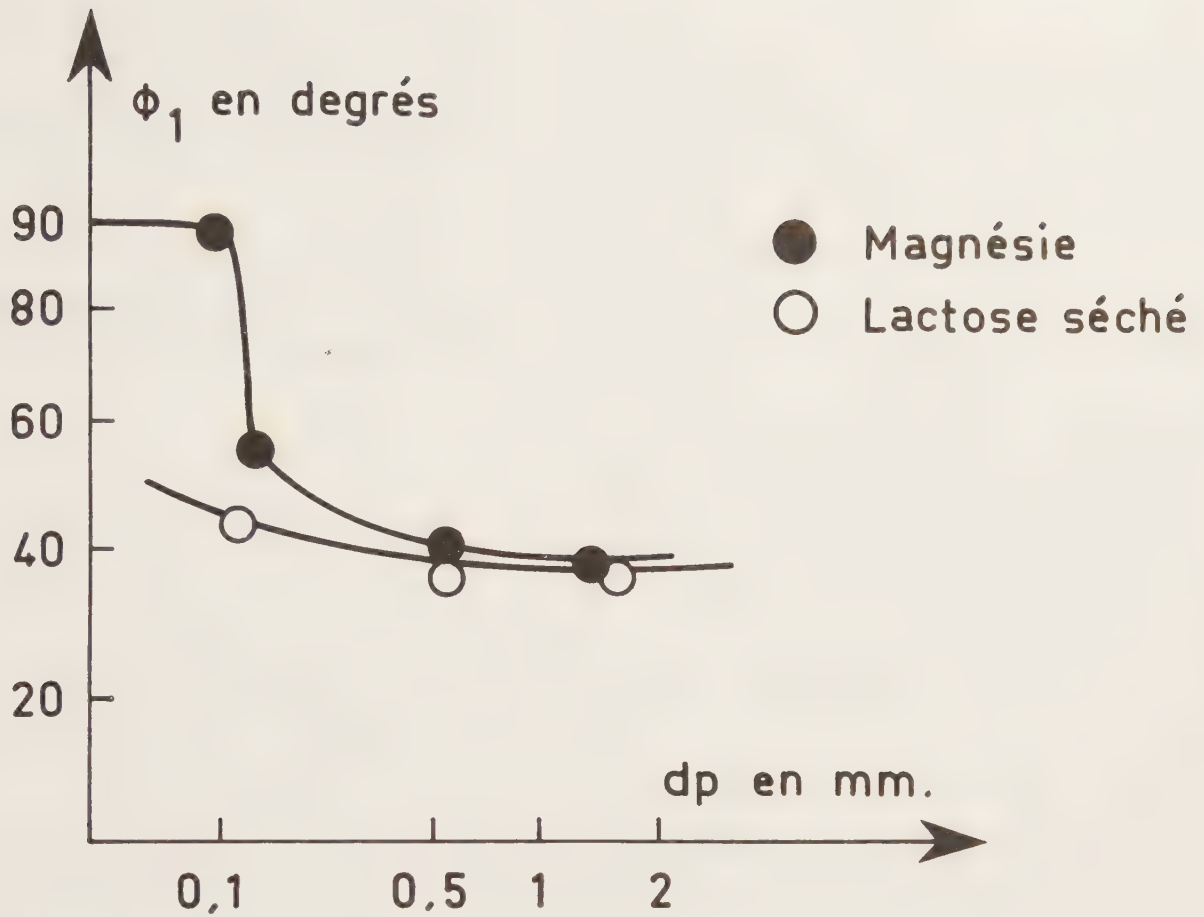


Fig. II-3 Influence du diamètre des particules sur l'angle de glissement .

On notera que le diamètre ne joue un rôle vraiment sensible que pour les sphères de diamètre inférieur de 0,5 mm ; par contre, l'adsorption de l'eau dans les conditions ambiantes perturbe beaucoup la mesure. On constate également que la nature de la paroi joue un rôle non négligeable pour les particules fines.

Remarquons enfin qu'aux forts diamètres pour lesquels les forces de Van Der Waals sont négligeables vis-à-vis du poids de la particule ($d_p > 0,5$ mm), l'angle de glissement reste très faible et même constant.

II - 3 PROPRIETES DYNAMIQUES

La connaissance des propriétés dynamiques d'un matériau solide divisé est primordiale pour l'étude du lit agité car, ainsi que nous l'avons vu dans le premier chapitre, ces grandeurs déterminent les plans de glissement ainsi que les contraintes mises en jeu.

II - 3 - 1 Angle de repos dynamique

Cette grandeur, introduite par TRAIN (T3), est l'angle d'inclinaison par rapport à l'horizontale de la surface supérieure d'un lit contenu dans un cylindre horizontal rempli à moitié lorsqu'il tourne lentement (6 tours/mm) autour de son axe. Cet auteur a remarqué que les angles de repos ainsi mesurés étaient inférieurs de 1 à 5 degrés à ceux obtenus par les méthodes statiques habituelles.

Pour notre part, nous avons mesuré l'angle de repos dynamique dans notre mélangeur horizontal qui possède des faces terminales transparentes. On a observé que la surface supérieure du lit est soumise à une légère oscillation autour d'une position d'équilibre ; son inclinaison n'est pas sensiblement différente de celle du bac pivotant utilisé pour les mesures statiques.

II - 3 - 2 Angle de frottement interne

Il a été défini au chapitre précédent ; rappelons qu'il découle de la mesure de la pente de la courbe intrinsèque.

II-3-2-1 La courbe intrinsèque ou lieu de rupture

Ainsi que nous l'avons mentionné au paragraphe I - 3, la courbe intrinsèque d'un matériau granulaire passe rarement par l'origine dans le diagramme du cercle de MOHR. On en déduit alors qu'il existe, à l'intérieur de la poudre, une tension dont la mesure est importante car elle influe sur la grandeur des forces qui interviennent lors de la mise en mouvement du lit. En effet, les équations I - 20 et I - 21 mettent en évidence leur participation au moment de l'initiation du glissement.

DAWES (B2) et ASHTON (A1) ont mesuré la tension interne de nombreux solides divisés ; leurs résultats ont montré qu'elle est inférieure en module à la valeur obtenue par extrapolation de la courbe intrinsèque (fig. I - 2).

Par ailleurs, les travaux théoriques de SMALLEY et SMALLEY (S6), DOUGLASS (D1) et CHENG (C4) mettent en évidence l'augmentation de la cohésion avec le tassement du matériau solide.

Il apparaît donc que les forces de liaison dans le matériau au repos sont indépendantes du coefficient de frottement ; on préfère donc écrire l'équation de la courbe intrinsèque sous la forme initiale :

$$T = C + \Sigma \text{tg } \mu \quad \text{II - 4}$$

En général, pour les solides divisés, cette courbe est une droite ($\text{tg } \mu = \text{cste}$). Si le matériau n'a pas de cohésion, la courbe intrinsèque se réduit à :

$$T = \Sigma \text{tg } \mu \quad \text{II - 5}$$

On retrouve donc bien la définition mécanique du coefficient de frottement.

II-3-2-2 Méthodes de mesure de l'angle de frottement interne

Les mesures de l'angle de frottement interne sont toutes basées sur l'équation II - 4 pour le cas général et parfois sur l'équation II - 5 pour les matériaux "fluides". Les premiers appareillages mis au point étaient destinés à la mesure de l'angle de frottement interne dans

les sols. Dans ce cas, le produit utilisé est humide car les glissements de terrain ont lieu dans les sols détremés, et les contraintes appliquées aux échantillons sont élevées pour rendre compte des conditions réelles. L'application de ces méthodes aux poudres conduit souvent à des résultats très divergents car la granulométrie ainsi que le facteur de forme sont modifiés pour les produits de faible dureté comme les polymères.

De plus, les poudres sont souvent mises en oeuvre à l'état sec, et la présence d'humidité dans le solide divisé crée des liaisons particulières qui modifient le comportement du matériau (cf. § I - 2).

JENIKE (J3), NOVOSAD (N2), ROSCOE (R4) ont adapté les techniques opératoires utilisées en mécanique des sols aux matériaux pulvérulents secs.

a) Méthode de JENIKE

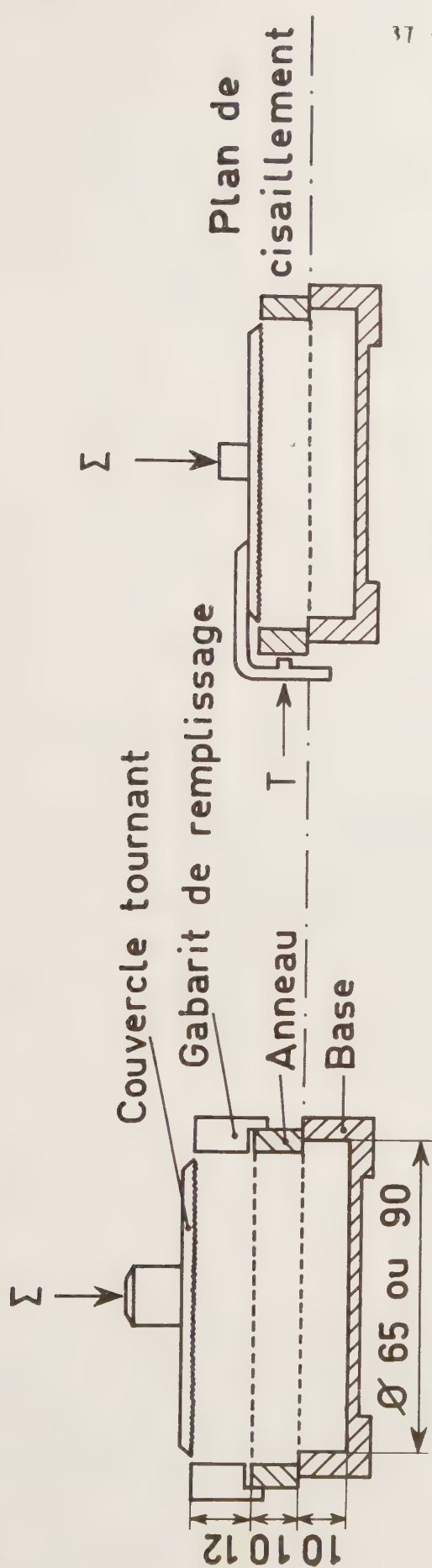
Cette méthode est une application directe de l'équation II - 4. Elle utilise une boîte de cisaillement (fig. II - 4) dont la partie supérieure est liée à un système d'entraînement à vitesse constante (environ 1 mm/min) par l'intermédiaire d'un dynamomètre.

Les conditions de glissement dépendant des traitements antérieurs subis par le matériau, JENIKE et ses collaborateurs (J3, J4) ont proposé une procédure de mise en oeuvre qui conduit à des résultats reproductibles.

L'échantillon à étudier est placé dans la boîte de cisaillement (fig. II - 4 - a) et soumis à une charge Σ_0 perpendiculaire à la surface de glissement. Ce traitement a pour but de consolider la poudre afin d'obtenir un cisaillement dans le plan de glissement ; puis pour supprimer les effets parasites qui existent dans les produits trop compacts, on fait tourner le couvercle. L'échantillon ainsi préparé est soumis aux mesures en procédant sous des charges normales Σ_i décroissantes ; on note à chaque fois la force maximale de cisaillement T_i . On obtient ainsi la courbe intrinsèque :

$$T_i = f(\Sigma_i) \quad \text{II - 6}$$

RICHARDS a montré expérimentalement que la valeur de la charge de consolidation Σ_0 n'influait pas la valeur de l'angle de



a) Consolidation

b) Cisaillement

Fig. II-4 Boîte de cisaillement de Jenike.

frottement interne mais son étude qui n'a porté que sur une variation relativement faible de Σ_o a été faite avec un solide peu déformable (charbon, $dp = 0,5$ mm). JENIKE et ses collaborateurs (J3) ainsi que WILLIAMS (W2) ont, pour leur part, constaté une légère influence de la charge, et pour certains matériaux de la durée de la consolidation. On obtient alors des courbes intrinsèques sensiblement parallèles :

$$T = C_i + \Sigma \operatorname{tg} \mu \quad \text{II - 7}$$

Les études récentes faites sur des produits tassés ont conduit les auteurs à modifier légèrement la méthode JENIKE dont la mise en oeuvre est assez délicate. En particulier, le laboratoire de technologie des Poudres de l'Université de Bradford (Angleterre) (W6) a mis au point une nouvelle cellule dérivant de celle de ROSCOE (R4) dans laquelle :

(1) la distribution des contraintes dans l'échantillon est plus uniforme,

(2) la section de la boîte de cisaillement est dessinée de façon que la rupture ait lieu simultanément sur toute la surface,

(3) la partie supérieure est montée sur roulements sans lubrifiant ce qui évite les frottements parasites.

Les auteurs espèrent ainsi vérifier une équation plus compliquée de la courbe intrinsèque qui tient compte simultanément :

a) du travail contre les forces extérieures

b) du travail contre les forces intérieures pour diminuer le nombre de contacts interparticulaires.

Elle s'écrit :

$$t = (\sigma + \sigma_t) \left(\operatorname{tg} \mu + \frac{d\Sigma}{dT} \right) \quad \text{II - 8}$$

en désignant par σ_t la tension interne du matériau.

b) Méthode de NOVOSAD

Dans beaucoup d'équipements industriels, si les contraintes appliquées au matériau sont du même ordre de grandeur que dans la méthode précédente, les déformations subies par le solide divisé sont, par contre beaucoup plus importantes.

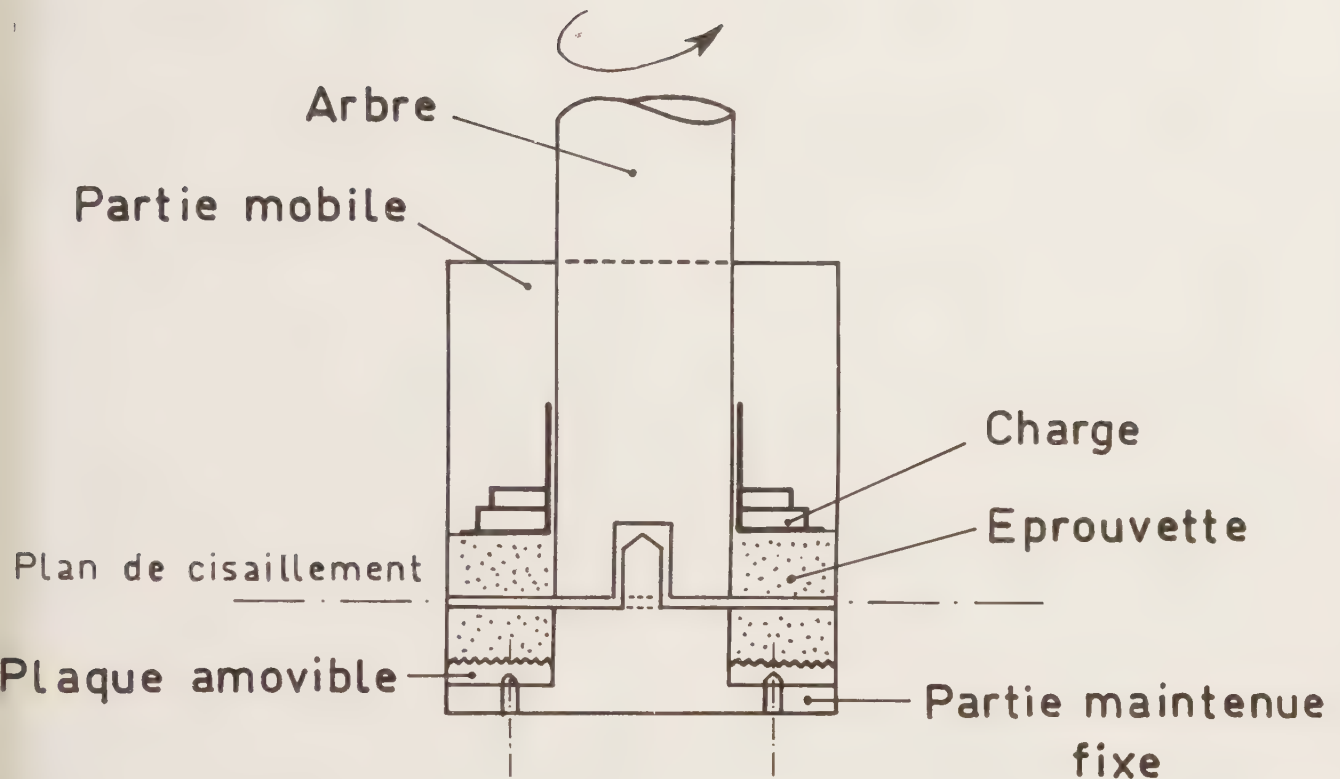


Fig. II-5 Schéma de la cellule de NOVOSAD .

Dans le but de mesurer les angles de frottement dans des conditions voisines de celles des applications industrielles, NOVOSAD (N2) a modifié l'appareil de HVORSLEV (H2) de manière à travailler avec de faibles contraintes mais à des vitesses de rotation élevées.

La cellule de mesure (fig II-5) est constituée d'un bac cylindrique possédant, en son centre, un arbre de gros diamètre ; cet arbre qui sert de guide à un plateau supportant les charges de consolidation, se positionne sur un pivot au centre de la couronne de façon que les deux parties de la cellule de mesure vide puissent tourner librement l'une par rapport à l'autre. On peut fixer à l'intérieur du bac une plaque annulaire mince et rugueuse pour la mesure de l'angle de frottement interne, ou une plaque lisse du matériau étudié, pour la mesure de l'angle de frottement externe.

Le remplissage de la cellule est fait de manière que le plan de cisaillement soit sensiblement le plan médian de l'échantillon ; ce dernier est alors soumis à une charge faible. La détermination de l'angle de frottement interne que l'auteur appelle dynamique, se fait de la même manière que dans la méthode précédente en portant la contrainte de cisaillement par unité de surface (dont la valeur découle du couple nécessaire pour maintenir le bac inférieur immobile quand la partie supérieure de l'agitateur tourne) en fonction des différentes contraintes normales appliquées à l'échantillon.

NOVOSAD a montré qu'entre 1 et 100 t/mm, la valeur du couple d'immobilisation du bac n'est pas affectée de façon sensible. Il a donc choisi arbitrairement une vitesse de rotation de 15 t/mm pour faire ses mesures.

Les résultats expérimentaux portent uniquement sur des produits non cohésifs ; la reproductibilité des mesures diminue très rapidement avec la taille des particules.

c) Méthode utilisée pour nos mesures

(1) Appareillage

Pour la mesure des angles de frottement interne, nous avons, quant à nous, utilisé un dispositif commercialisé pour l'étude des sols : l'appareil de CASAGRANDE représenté sur la figure II - 6. La boîte de

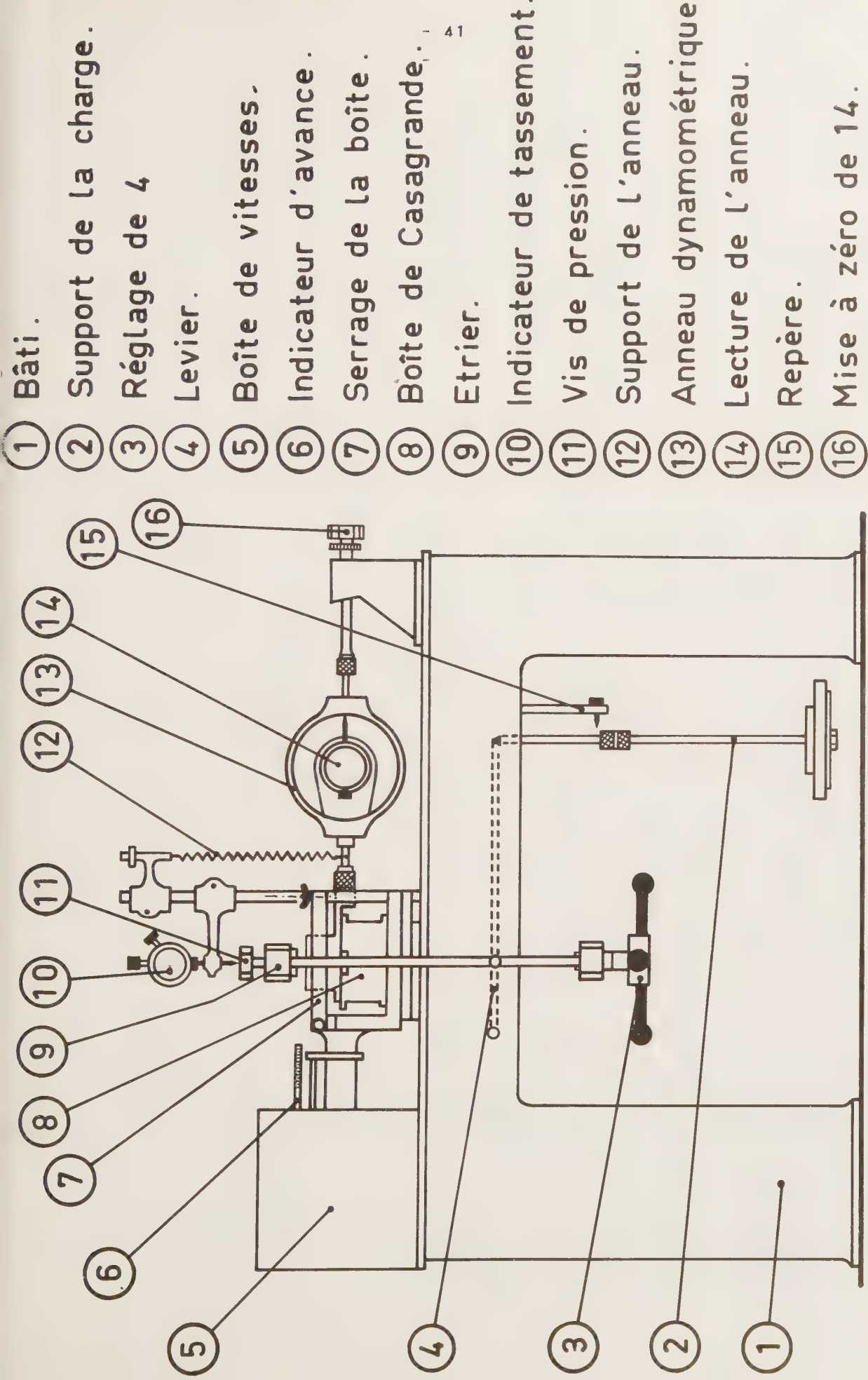


Fig. II-6 Appareil de CASAGRANDE .

cisaillement est une boîte carrée de 6 cm de côté ; la partie inférieure a 3 cm de profondeur, la partie supérieure maintenue en position par deux goupilles lors du remplissage est munie d'un couvercle qui s'emboîte sans jeu. La boîte est remplie de façon que le plan de cisaillement soit approximativement au milieu de l'échantillon. Le reste de l'appareillage permet de déplacer lentement la partie supérieure à vitesse uniforme et de mesurer les forces mises en jeu lors du glissement.

(2) Mode opératoire

Le mode opératoire de l'appareil a été quelque peu modifié pour tenir compte des remarques faites lors de l'introduction de ce paragraphe.

L'échantillon sec est placé dans la boîte et soumis, par l'intermédiaire du levier (4), à une charge de consolidation de 20 kg ; la contrainte correspondante égale à 556 g/cm^2 , est environ deux fois plus élevée que celles utilisées couramment dans l'appareil de JENIKE, mais comme les particules sont très dures et sphériques, il n'y a pas lieu de craindre des déformations. On vérifie ensuite à l'aide du repère (15) que la force exercée par le levier est bien verticale, puis on retire une goupille de centrage et on secoue très légèrement la partie supérieure de la boîte de cisaillement de manière à supprimer les effets parasites présents dans les échantillons trop comprimés. On place alors une charge inférieure sur le levier avant d'enlever la deuxième goupille. Le dispositif d'entraînement de l'éprouvette est mis en route après fixation des systèmes de mesure de la force de cisaillement et de la dilatation du lit. La courbe reliant la force de cisaillement à la déformation d'un échantillon convenablement consolidé présente une croissance rapide suivie d'un palier. Sur certaines des courbes que nous avons obtenues, on observe parfois un maximum au début du cisaillement comme on peut le voir sur la figure II - 7 : on a éliminé les mesures pour lesquelles ce maximum surpasse le palier de plus de 20 % ; ceci nous a conduit en particulier à ne pas retenir de charges de consolidation supérieures à 20 kg.

Lorsque le palier est obtenu, on a constaté qu'une modification de la charge appliquée à l'échantillon provoque une variation réversible de la contrainte de cisaillement.

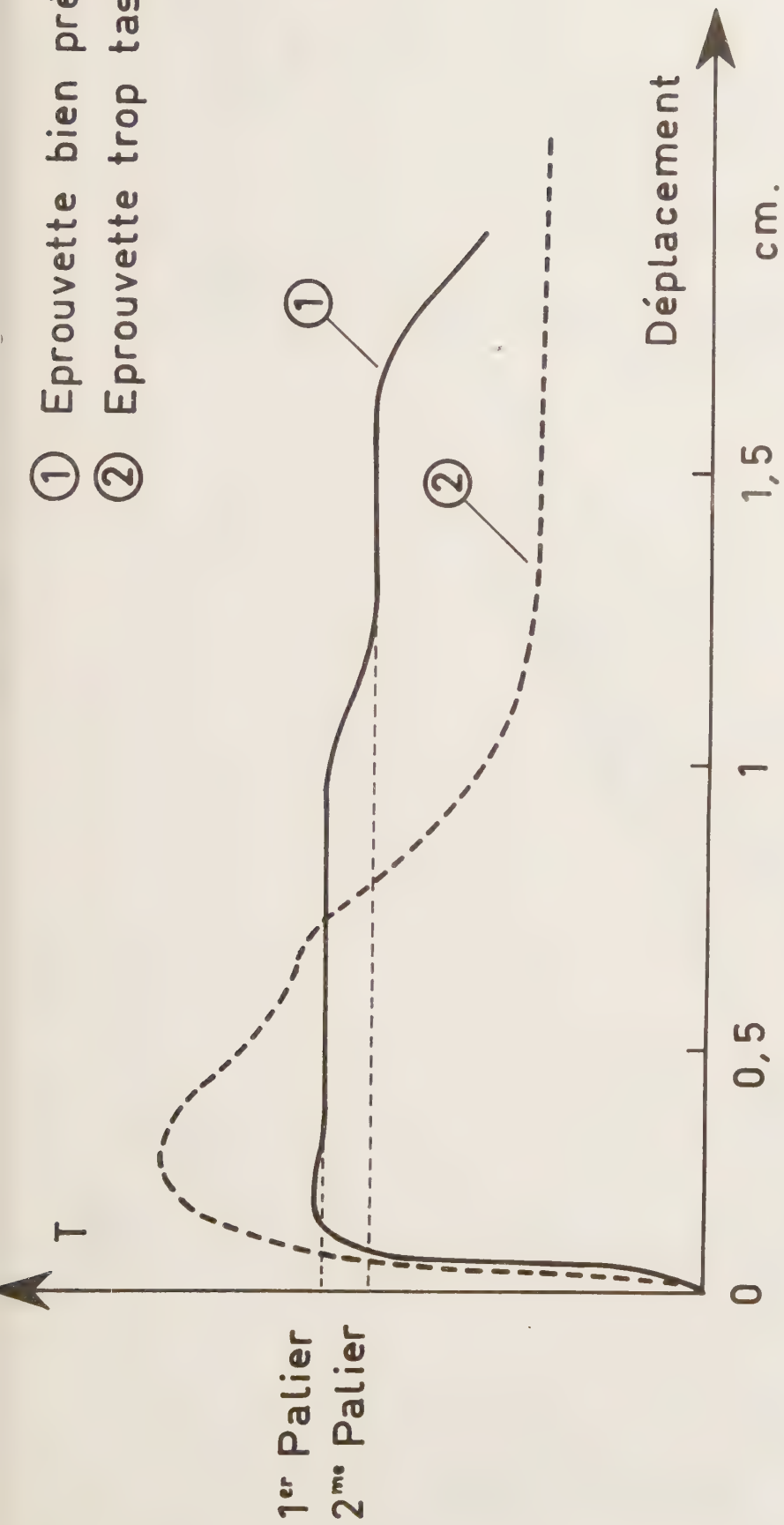


Fig. II-7 Allure de la contrainte de cisaillement mesurée au cours de la déformation de l'échantillon.

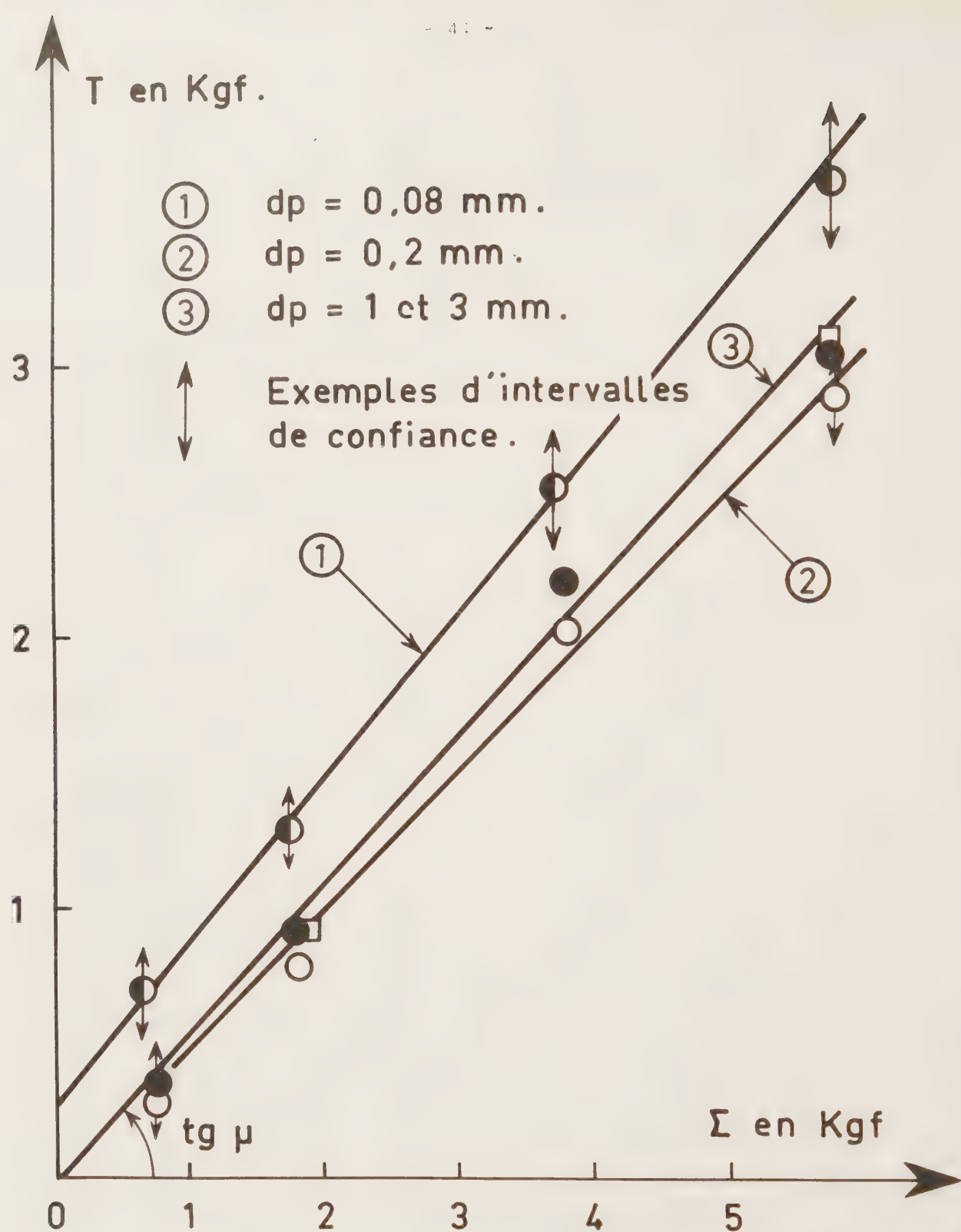


Fig. II-8 Courbes intrinsèques au début du glissement.

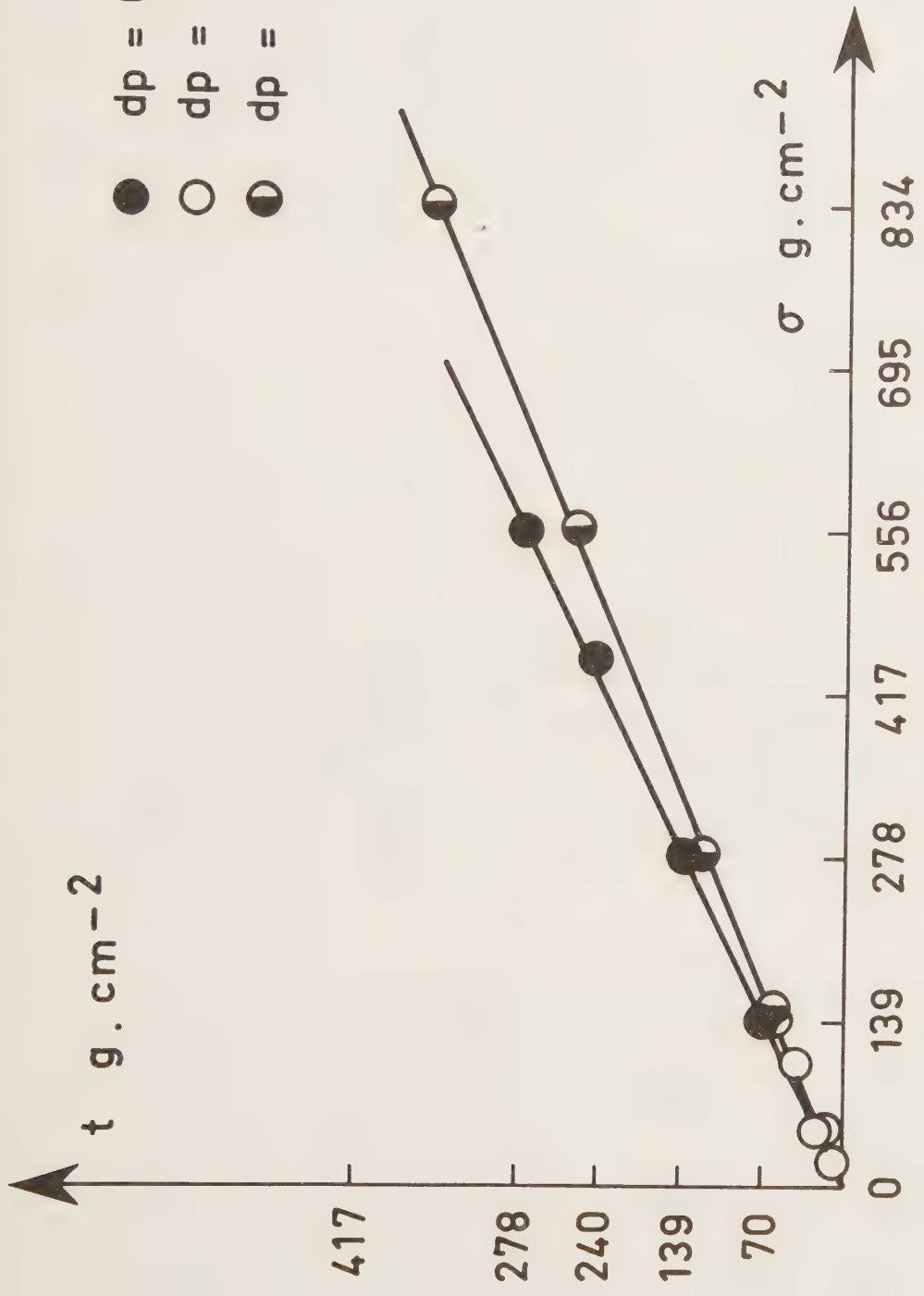


Fig. II-9 Courbes intrinsèques après réarrangement de la surface de glissement

Remarque : Le problème de l'échantillon trop tassé s'est surtout posé pour les billes fines de 0,2 et 0,08 mm. Lors du cisaillement, ce type d'éprouvettes se divise en trois parties : deux zones identiques très tassées et présentant une forte cohésion au voisinage du fond et du couvercle de la boîte et une zone très lâche de part et d'autre du plan de cisaillement. Les angles de frottement interne obtenus dans ce cas sont très faibles : de l'ordre de la moitié des angles réels. Nous n'avons pas poussé plus loin nos investigations étant donné que notre étude a trait à des matériaux non consolidés ; pour ces problèmes on se reportera avec profit aux travaux de HVORSLEV (H3), ROSCOE et al (R4) et de WILLIAMS et BIRKS (W3 et 4).

(3) Résultats

A l'exception des billes de 0,08 mm qui possèdent une légère cohésion ($0,1 \text{ N/cm}^2$), les matériaux étudiés se comportent comme des matériaux idéaux, c'est-à-dire non cohésifs ; ils vérifient l'équation II - 5 ($T = \Sigma \text{tg} \mu$) comme le montrent les figures II - 8 et II - 9.

On a par ailleurs constaté, et ce phénomène était plus net avec des charges de consolidation de 20 kgf, l'existence d'un deuxième palier (fig. II - 9) après une déformation de l'échantillon de l'ordre du centimètre. Ce palier ne correspond pas à celui obtenu avec des charges de consolidation trop élevées ; il semble provenir d'un réarrangement du plan de cisaillement. Les angles de frottement interne qui découlent du calcul de la pente des courbes intrinsèques sont consignés dans le tableau II - 4.

d_p (mm)	μ (fig II - 8)	μ (fig II - 9)	moyen	μ angle de repos
0,08	$31^\circ + 2^\circ$	$26^\circ 5' + 2^\circ$	$28^\circ 7'$	$32^\circ 5'$
0,2	$26^\circ 5' + 2^\circ$	-	-	$25^\circ 4'$
1	$28^\circ + 1^\circ$	$24^\circ + 1^\circ$	26°	$26^\circ 5'$
3	$28^\circ + 1^\circ$	$24^\circ + 1^\circ$	26°	$27^\circ 5'$

TABLEAU II - 4

Nous avons eu quelques difficultés de reproductibilité avec les billes fines ; ceci explique la valeur manquante pour les sphères de 0,2 mm pour lesquelles le second palier n'est pas suffisamment marqué. Néanmoins, les résultats obtenus sont en bon accord avec les données de la littérature (B2).

On notera aussi sur le tableau II - 4 que les angles de repos sont très voisins des angles de frottement interne sauf pour les billes de 0,08 mm pour lesquels les interactions des particules au repos commencent à jouer un rôle non négligeable.

Nous pensons que la méthode opératoire que nous avons décrite ne peut donner des résultats satisfaisants que pour des matériaux durs ayant un comportement "idéal". En particulier, le mode de préparation des échantillons ne pourrait pas convenir pour les milieux pulvérulents, cohésifs et mous, pour ces matériaux l'essai triaxial que nous n'avons pas étudié ici en raison du manque d'appareillage devrait donner des résultats plus satisfaisants.

II -3 - 3 Angle de frottement externe ϕ

La mesure des forces de frottement et d'adhésion entre un matériau pulvérulent et une paroi est plus facile que celui des contraintes de cisaillement à l'intérieur du solide. La force de frottement T_p correspondant à la mise en mouvement du solide par rapport à la paroi est reliée à la charge Σ perpendiculaire par la relation linéaire I - 3 citée au chapitre précédent :

$$T_p = A + \Sigma \operatorname{tg} \phi$$

Dans cette équation, A et ϕ sont mutuellement indépendants comme on l'a mentionné pour C et μ .

II-3-3-1 Méthodes de mesure de ϕ

Les méthodes précédentes de détermination de l'angle de frottement interne sont directement applicables à la mesure de ϕ ; il suffit de placer au niveau de la surface de cisaillement de la cellule de mesure une surface plane constituée par le matériau étudié. Le mode opératoire est considérablement simplifié, car la dilatation du matériau n'intervient pas. Les lieux de rupture à la paroi obtenus par ces méthodes en chargeant légèrement les échantillons passent toujours au voisinage de l'origine.

Une autre méthode de détermination de A et $\text{tg } \phi$ repose sur l'emploi de l'appareillage décrit pour la mesure de l'angle de glissement (§ II-2-2-b). En effet, considérons une masse de matériau pulvérulent déposé en une couche uniforme relativement mince sur un bac de surface de base a que l'on incline d'un angle θ par rapport à l'horizontale. Les composantes normales et parallèles à la paroi de la pression exercée par le lit sur la base sont respectivement $mg \sin \theta/a$ et $mg \cos \theta/a$. Si θ est l'angle à partir duquel les billes glissent sur la paroi, ces deux contraintes satisfont l'équation I - 3 ; il vient :

$$\frac{mg \sin \theta}{a} = A + \frac{mg \cos \theta}{a} \text{tg } \phi \quad \text{II - 9}$$

On obtient le lieu de rupture à la paroi en opérant avec différentes masses m du matériau. Cette méthode permet une meilleure estimation de l'adhésion à la paroi (B2).

Malheureusement, si les méthodes expérimentales de détermination de l'angle de frottement externe sont plus simples à mettre en oeuvre que celles relatives à l'angle de frottement interne, les résultats obtenus sont, par contre, très dispersés. Un grand nombre de mesures est donc nécessaire pour obtenir une valeur satisfaisante de .

II-3-3-2 Rapport entre l'angle de frottement externe et l'angle de glissement.

Appliquons la méthode du bac inclinable à des matériaux n'adhérant pas à la paroi ($A = 0$) ; l'équation II - 9 se réduit dans ce cas à :

$$\frac{mg \sin \theta}{a} = \frac{mg \cos \theta}{a} \text{tg } \phi \quad \text{II - 10}$$

ou plus simplement :

$$\text{tg } \theta = \text{tg } \phi \quad \text{II - 11}$$

Si l'on se rappelle que l'angle de glissement est l'angle à partir duquel une fine couche de particules commence à glisser sur la paroi, l'équation II - 11 montre que pour les matériaux non adhérents à la paroi, l'angle de glissement est identique à l'angle de frottement externe, soit :

$$\text{tg } \theta = \text{tg } \phi = \text{tg } \phi_1 \quad \text{II - 12}$$

Comme les billes de 0,5, 1 et 3 mm ont le même angle de glissement, conservent le même comportement après séchage sous vide ou changement de la nature de la surface (cf. tableau II - 3) et ne possèdent pas de cohésion, on peut raisonnablement penser qu'elles n'adhèrent pas à la paroi. La relation II - 13 permet alors d'attribuer la valeur 6° à l'angle de frottement externe de ces matériaux ; ce résultat est en bon accord avec la valeur obtenue par NOVOSAD (N2) pour les billes de verre de 3 mm.

Dans le cas des surfaces lisses, MORGAN (M2) a vérifié expérimentalement que la taille des particules n'influence que l'adhésion à la paroi ; nous supposons donc que l'angle de frottement externe des billes de 0,2 et 0,08 mm est aussi voisin de 6° ; cette hypothèse se trouve confirmée par le fait que dans notre mélangeur d'axe horizontal, le couple nécessaire à l'agitation du lit granulaire est indépendant du diamètre des particules (Chapitre IV).

II - 4 CONCLUSION

Les résultats expérimentaux ont montré que, dans le cas de particules identiques sphériques et dures, la taille joue un rôle très faible sur le comportement du milieu pulvérulent. On a seulement noté une influence non négligeable sur la cohésion et l'adhésion à la paroi pour les billes de 0,08 mm.

o

o

o

CHAPITRE III

ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE DU MELANGE ET DE L' AGITATION DES SOLIDES DIVISES

- SOMMAIRE -

III - 1 INTRODUCTION

III - 1 - 1 Généralités

III - 1 - 2 Considérations préliminaires

III - 2 LES DIFFERENTS MECANISMES DE MELANGE

III - 2 - 1 Les critères de mélange

III - 2 - 2 Les processus de mélange

III - 2 - 3 Principaux résultats

III - 3 ETUDE DES TRAJECTOIRES DES PARTICULES

III - 3 - 1 Le cylindre tournant

III - 3 - 2 Action d'une pale

III - 4 PUISSANCE NECESSAIRE A L'AGITATION

III - 4 - 1 Introduction

III - 4 - 2 Etude du cylindre tournant

III - 4 - 3 Etude d'autres mélangeurs

III - 4 - 4 Introduction de la mécanique des sols pour
la détermination du travail des pales

III - 4 - 5 Conclusion

- NOTATIONS -

a	Maître couple du système d'agitation
C	Couple sollicitant l'agitateur
C_w	Coefficient variable
D	Diamètre du mélangeur
D_a	Diamètre de l'agitateur
G	Poids de la charge
g	Accélération de la pesanteur
h	Profondeur d'immersion de la pale
N	Vitesse de rotation de l'agitateur ou du cylindre tournant
N_c	Vitesse critique de précentrifugation
N'_c	Vitesse critique de précentrifugation dans les cylindres lisses
N_{eq}	Vitesse de transition vers l'état d'équilibre du lit
n	Numéro de la $n^{ième}$ couche de particules à partir de la paroi
K	Constante
L	Longueur du mélangeur
l	Distance du centre de gravité de la charge à l'axe du mélangeur
R	Rayon du mélangeur
R_a	Rayon de l'agitateur
w	Vitesse angulaire = $2 N$
Z_e	Nombre qui caractérise la masse du lit instantanément emporté par l'agitateur
ρ	Masse spécifique apparente du lit
η	Caractéristique dynamique de NOVOSAD
σ	Contrainte normale à la pale
μ	Angle de frottement interne

ϕ	Angle de frottement externe
μ_1	Angle de repos
ϕ_1	Angle de glissement
τ	Taux de remplissage du mélangeur

III - 1 INTRODUCTION

III - 1 - 1 Généralités

Si le mélange des liquides newtoniens commence à être une opération industrielle bien connue, il en est tout autrement des problèmes concernant les milieux pulvérulents. Ceci provient du fait que les mécanismes qui régissent les interactions entre les particules sont comme on l'a vu précédemment, encore très mal compris. On a donc développé industriellement une variété considérable de mélangeurs qui ont été mis au point d'une manière totalement empirique ; RIES (R5), TAUSK et STERBACEK (T4) ont recensé les principaux types et donné pour certains d'entre eux un ordre de grandeur de la puissance mécanique dégradée.

III - 1 - 2 Considérations préliminaires

L'examen de la littérature montre qu'il existe un grand nombre de méthodes d'étude des mélangeurs. Par contre, peu de travaux fournissent des résultats concrets sauf en ce qui concerne les cylindres tournants. En particulier, les mélangeurs horizontaux avec agitateur du type double cadre qui nous intéressent ici n'ont pas été étudiés. Pour faciliter la compréhension de certains phénomènes qui s'y rattachent, nous serons amenés à procéder par analogie avec les cylindres tournants : aussi analyserons nous les principaux résultats qui les concernent.

L'étude des mélangeurs de solides a été abordée sous différents angles :

- la mesure de la puissance mécanique mise en jeu,
- la détermination des processus de mélange et l'estimation du temps de mélange,
- la détermination des trajectoires des particules,
- l'étude des transferts de chaleur et de matière

Tous ces phénomènes sont évidemment liés.

III - 2 LES DIFFERENTS MECANISMES DE MELANGE

III - 2 - 1 Les critères de mélange

Avant toute étude du mélange, il est nécessaire de définir des critères d'homogénéité ; plus de trente critères différents ont été proposés. Une importante bibliographie a été récemment publiée sur ce sujet par FAN et ses collaborateurs (F2) : elle compte deux cent références. Il sort de notre propos de discuter ici les résultats acquis dans ce domaine. On se contentera de signaler que la plupart des critères de mélange dépendent de la taille et du nombre des échantillons prélevés ; malheureusement, il n'existe à l'heure actuelle aucune méthode permettant de déterminer la valeur optimale de ces paramètres.

Notons également que certains auteurs (VI, W5, L3) ont mis un accent particulier sur les phénomènes de ségrégation lors du mélange de matériaux de caractéristiques très différentes. ROSE (R6) introduit dans ce cas une nouvelle définition du degré de mélange qui tient compte de l'efficacité du mélangeur et de la ségrégation résiduelle.

III - 2 - 2 Les processus de mélange

Trois mécanismes ont été proposés par plusieurs auteurs pour rendre compte du mélange des solides (G3).

II-2-2-1 Le mélangeage axial par diffusion

Le comportement d'un matériau dans un mélangeur où des particules sont continuellement apportées à la surface du lit où elles subissent des chocs aléatoires peut s'interpréter par un mécanisme analogue à la diffusion moléculaire. Il est donc régi par la loi de FICK. HAGG (H4), FUERSTENAU (F3) ainsi que DONALD (D2) et leurs collaborateurs ont perfectionné ce modèle dans le cas de particules de diamètres différents pour lesquelles il existe des chemins préférentiels.

III-2-2-2 Le mélangeage par convection

Il est défini comme le transport d'un ensemble de particules d'un endroit du mélangeur à un autre. Il semble que ce soit le mécanisme

prépondérant dans le cas des agitateurs à socs ou à spirales. WEIDANZ (W7) a étudié théoriquement ce mécanisme dans lequel peut intervenir le phénomène de ségrégation des particules.

III-2-2-3 Le mélange par cisaillement du lit et inter-pénétration.

Ce dernier type de mécanisme dont les bases ont été jetées par BROTHMAN et ses collaborateurs (B5) intervient quand des surfaces de glissement apparaissent dans le milieu ; c'est ce qui se passe en particulier dans les mélangeurs à vis sans fin. Le modèle initial a été vérifié expérimentalement par COULSON et MAITRA (C6) moyennant certaines hypothèses simplificatrices.

Une description plus complète des mécanismes de mélange pourra être trouvée dans l'ouvrage de WEIDENBAUM (W8).

III - 2 - 3 Principaux résultats

Seul le cylindre tournant a été étudié en détail d'une manière théorique et expérimentale ; le mélange axial y suit un processus diffusionnel similaire à la diffusion dans les phases liquides.

L'évolution des critères de mélange en fonction du temps est généralement interprétée par une cinétique du 1er ordre ; un mécanisme du second ordre a cependant été proposé par GAYLE et GARY (G5) pour rendre compte des résultats au début du mélange.

III - 3 ETUDE DES TRAJECTOIRES DES PARTICULES

La connaissance des trajectoires des particules ou plus simplement des lignes de glissement dans le mélangeur est très importante car elle permet de définir le processus de mélange d'une part et déterminer la distribution des contraintes comme on l'a vu au chapitre I, d'autre part.

L'examen de la littérature montre que les trajectoires des particules n'ont été étudiées que pour les cylindres tournants horizontaux. Cependant, quelques modèles ont été proposés pour interpréter le

mouvement des particules sous l'effet d'une pale dans un milieu semi-infini ; on peut alors à l'aide de la mécanique des sols, calculer la force exercée sur la pale.

III - 3 - 1 Le cylindre tournant

Ainsi que nous l'avons mentionné plus haut, le mélange axial dans les cylindres tournants est bien représenté par un mécanisme diffusionnel supposant des trajectoires désordonnées. L'étude du mélange radial n'a pas donné lieu à de nombreux développements, car ce phénomène est beaucoup plus rapide que le précédent et ne détermine donc pas le temps de mélange. Néanmoins, de nombreux travaux ont mis en évidence la complexité des trajectoires des particules.

VAVRA (V2) a enregistré le mouvement des particules au moyen d'une caméra ultra-rapide ; il a ainsi pu mettre en évidence sept zones pour lesquelles les trajectoires sont totalement différentes.

LLOYD et ses collaborateurs (L2 - L3) ont pour leur part étudié la vitesse des particules ; leurs résultats semblent montrer que le nombre de particules ayant une trajectoire circulaire reste sensiblement constant entre 50 et 80 tours/mn, mais que la porosité passe par un maximum. Signalons que cette étude renferme une importante bibliographie sur le mélange des solides.

Certains auteurs ont essayé d'étudier analytiquement les trajectoires des particules ; diverses modifications de la théorie proposée à l'origine par DAVIS ont été publiées : ROSE et SULLIVAN (R7) en présentent une mise à jour. Pourant, très peu de travaux ont été consacrés à leur vérification expérimentale. Citons cependant ceux de RONCO et alt. (R8, R9) et de JULOU et LE GOFF (J5) ; ces auteurs ont observé les six états suivants :

- état de cascade

Aux faibles vitesses de rotation, l'ensemble des billes se divise en deux groupes séparés par une surface dont la trace sur un plan perpendiculaire à l'axe du mélangeur est une spirale logarithmique ; les billes situées au-dessous de cette surface sont immobiles par rapport à

la paroi ; elles ont des projections circulaires. Les billes situées au-dessus tombent en couches inclinées et roulent en cascade les unes sur les autres.

- état de cataracte

Aux vitesses plus grandes, les billes des couches supérieures du lit amorcent des trajectoires paraboliques puis retombent sur les billes en mouvement de cascade.

- état d'équilibre

Lorsque les points de chute des billes qui décrivent une trajectoire parabolique se situent sur celles qui remontent, on atteint l'état d'équilibre. En adoptant l'hypothèse des trajectoires paraboliques de DAVIS, JULOU a calculé la vitesse de rotation correspondante ; elle est donnée par :

$$N_{eq} = \frac{1}{2 \pi^4 \sqrt{3}} \sqrt{\frac{g}{R}} \quad \text{III - 1}$$

- état de saturation

Si l'on augmente la vitesse de rotation, les trajectoires s'amplifient et le volume apparent de la charge augmente jusqu'à occuper le volume total du cylindre ; on pourrait définir cet état de mouvement comme une "fluidisation mécanique" du lit de billes.

- état de précentrifugation

Quand la vitesse de rotation atteint la valeur critique N_c une première couche de billes est centrifugée. Il est généralement admis qu'une particule est centrifugée quand la force centrifuge est égale à son poids ; il en résulte :

$$N_c = \frac{1}{2 \pi} \sqrt{\frac{g}{R}} \quad \text{III - 2}$$

Les vitesses correspondant à la centrifugation progressive des couches de billes peuvent être calculées si l'on connaît le système

suivant lequel s'effectue leur empilement. Par exemple, dans le système cubique centré, la vitesse théorique de centrifugation de la N^{ième} couche sera :

$$N_{cn} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{R - \frac{dp}{2} [1 + (n-1) \sqrt{2}]}} \quad \text{III - 3}$$

- état de centrifugation

Dans cet état, toutes les billes sont maintenues fixées sur la paroi par centrifugation.

L'expérience montre que les relations III - 2 et III - 3 ne sont vérifiées que si le coefficient de frottement à la paroi est suffisant. En effet, lorsque le cylindre tourne à une vitesse supercritique, la résultante des forces s'exerçant sur une particule possède une composante normale à la paroi et une composante tangentielle ; pour que la particule ne glisse pas, il faut que cette dernière composante soit compensée par une contrainte de frottement suffisante.

En écrivant l'équilibre entre le poids, la force centrifuge et le frottement des particules, QUIROZ et RONCO (Q1) ont obtenu une expression différente de III - 2 pour la vitesse critique ; dans les cylindres à paroi lisse, elle s'écrit :

$$N'_c = N_c \left(1 + \frac{1}{\text{tg } \phi} \right)^{1/4} \quad \text{III - 4}$$

Cette relation n'est valable que pour les faibles taux de remplissage ; en effet, quand on remplit progressivement le mélangeur, la vitesse critique diminue et tend vers N_c (eq. III - 2). Pour expliquer ce phénomène, les auteurs admettent que le coefficient de frottement à la paroi augmente avec la pression.

Les mouvements des particules sont donc très complexes et aucune représentation entièrement satisfaisante n'a été proposée pour rendre compte des trajectoires réelles dans les cylindres tournants.

III - 3 - 2 Action d'une pale

Le mouvement des particules autour d'une pale tournant dans un cylindre vertical contenant un matériau granulaire a été étudié par

NOVOSAD ; une méthode photographique (N1) lui a permis de déterminer les lignes de glissement dans le milieu agité. L'auteur (N3) s'appuie sur les principes de la mécanique des sols pour déterminer graphiquement les lignes de glissement théorique dans le matériau granulaire ; l'accord avec les lignes expérimentales reste satisfaisant tant que la profondeur d'immersion est faible.

De la méthode graphique de construction des lignes de glissement découle une méthode d'estimation de la force agissant sur la face antérieure de la pale si l'on suppose que les effets de bords sont négligeables. Le calcul montre que le rapport entre la force qui s'exerce normalement à l'unité de surface de pale et la pression hydrostatique régnant à sa profondeur d'immersion h , c'est-à-dire :

$$\eta = \frac{\sigma}{h\rho g} \quad \text{III - 5}$$

est donné par l'expression suivante :

$$\eta = \cos \phi (\cos \phi + \sqrt{\sin^2 \mu - \sin^2 \phi}). \quad \text{III - 6}$$

$$\exp \left[\left\{ \frac{\pi}{2} + \phi + \mu + \arcsin \left(\frac{\sin \phi}{\sin \mu} \right) \right\} \operatorname{tg} \mu \right]$$

Le deuxième membre qui fait intervenir les angles de frottement dynamique μ et ϕ est généralement appelé "Caractéristique dynamique de NOVOSAD".

De son côté, BAGSTER (B7) a étudié le même problème dans une géométrie à deux dimensions. Comme NOVOSAD, il a essayé de déterminer la force s'exerçant sur une pale immergée à faible profondeur. Après avoir montré que la méthode de Coulomb qui suppose une surface de rupture plane fournit des valeurs erronées pour la force agissant sur la pale, cet auteur a arbitrairement représenté la surface de rupture par une spirale logarithmique d'équation polaire :

$$r = r_0 e^{\theta \operatorname{tg} \mu} \quad \text{III - 7}$$

passant par le bord inférieur de la pale.

Dans cette relation, $\text{tg } \mu$ est le coefficient de frottement interne ; le paramètre r_0 qui dépend de la position inconnue du pôle de la spirale est déterminé par le calcul en minimisant la force s'exerçant sur la pale. Aux profondeurs moyennes, l'auteur obtient deux minimums donc deux surfaces de rupture qui correspondent à l'initiation, et au glissement dans le matériau en mouvement. Les forces calculées sont voisines des valeurs expérimentales mais toujours légèrement plus faibles.

BAGSTER a, par ailleurs, constaté que l'inclinaison des forces sur les pales est inférieure à l'angle de frottement externe du matériau contrairement à ce que suppose la mécanique des sols classique (T1). On peut voir là une justification des angles de frottement dynamique de NOVOSAD (N2).

Ces travaux montrent le grand intérêt de l'introduction de la mécanique des sols pour l'étude du travail nécessaire à l'agitation des milieux pulvérulents. La complexité des phénomènes et le manque d'informations irréfutables sur le comportement du solide divisé sont les seules raisons qui expliquent le nombre très faible de publications dans ce domaine.

III - 4 PUISSANCE NECESSAIRE A L'AGITATION

III - 4 - 1 Introduction

La prédiction de la puissance nécessaire à l'agitation des lits granulaires a beaucoup d'importance du point de vue pratique pour le dimensionnement des mélangeurs industriels.

Par ailleurs, il semble qu'il n'y ait pas une relation très étroite entre la puissance mécanique consommée et l'efficacité du mélangeur ; en effet, OYAMA (01) a constaté sur les cylindres tournants qu'à la puissance maximale correspond l'efficacité maximale. D'autre part, pour les études de transfert de chaleur, PENNEY (P3) propose de choisir comme expression de transfert de chaleur $h = K P^{0,2}$ pour tous les milieux agités.

La connaissance du couple nécessaire à l'agitation fournit donc des informations précieuses sur le comportement du lit granulaire.

Bien que KEEY (K1) ait montré que les relations valables pour les liquides peuvent être étendues au mélange de phases mixtes solide-liquide, l'extrapolation n'est plus valable pour les milieux strictement anisotropes que sont les matériaux granulaires et on ne trouve pour l'instant dans la littérature que des études empiriques ou pseudothéoriques.

III -4 - 2 Etude du cylindre tournant

Comme pour les problèmes précédents, le cylindre tournant est l'appareil le plus étudié. Dès 1930, BARTH (B8) propose pour calculer la puissance consommée la relation suivante :

$$P = C_w G \sqrt{D} \quad \text{III - 8}$$

dans laquelle G est le poids du matériau contenu dans le cylindre de diamètre D et C_w , un coefficient, fonction de la vitesse de rotation, du taux de remplissage et du type de mélangeur.

Dans le cas d'un mouvement en cascade des particules, MUELLER F.(M5) rappelle que l'équation la plus couramment utilisée s'écrit :

$$P = 2 \pi N G l \sin \mu_1 \quad \text{III - 9}$$

en désignant par l la distance du centre de gravité de la charge à l'axe de rotation et par μ_1 l'angle de repos dynamique.

ROSE et SULLIVAN (R7) ont pour leur part constaté que l'influence de la taille des particules et du coefficient de frottement externe ϕ sont négligeables pour $dp/D < 1/20$. La courbe théorique $P = f(\tau)$ donnant la puissance consommée en fonction du taux de remplissage τ du mélangeur est une parabole admettant un maximum pour $\tau = 0,5$; elle rend convenablement compte des résultats expérimentaux.

RONCO et ses collaborateurs (R8) puis JULOU et LE GOFF (J5) ont abordé l'étude de la consommation de puissance d'un cylindre rotatif à l'aide de l'analyse dimensionnelle qui conduit à l'expression :

$$\frac{P}{\rho D^4 N^3 L} = f \left(\frac{N^2 D}{g}, \frac{dp}{D}, \text{tg } \phi, \tau \right) \quad \text{III - 10}$$

En tenant compte de la constatation de ROSE et SULLIVAN au sujet de $\text{tg } \phi$ et $\frac{dp}{D}$, cette relation devient :

$$\frac{P}{\rho D^4 N^3 L} = f_1 \left(\frac{N^2 D}{g}, \tau \right) \quad \text{III - 11}$$

Ces auteurs obtiennent finalement les relations empiriques suivantes :

a) tant que le lit n'a pas atteint l'état de précentrifugation :

$$\frac{P}{\rho D^4 N^3 L} = 1,3 \left(\frac{N^2 D}{g} \right)^{-1} \cdot \tau \cdot (1 - \tau) \quad \text{III - 12}$$

b) quand les billes commencent à être centrifugées :

$$\frac{P}{\rho D^4 N^3 L} = 3,2 \cdot 10^{-3} \left(\frac{N^2 D}{g} \right)^{-2,8} \cdot (1 - \tau) \cdot \tau \quad \text{III - 13}$$

Lorsque les frottements à la paroi sont importants, le changement de régime a lieu pour la vitesse N_c donnée par l'équation III - 2 ; on utilise généralement le nombre de FROUDE $Fr = \frac{N^2 D}{g}$ pour caractériser l'état de mouvement de la charge car ce nombre tient compte de la configuration géométrique du mélangeur ; la valeur critique du nombre de FROUDE est alors :

$$Fr = \frac{N_c^2 D}{g} = \left(\frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{R}} \right)^2 \cdot \frac{D}{g} = \frac{1}{2\pi^2} \quad \text{III - 14}$$

Lorsque les glissements à la paroi sont importants (§ III-3-1), le changement de régime est déplacé vers les vitesses supérieures et l'équation III - 12 reste valable dans un plus grand domaine.

III - 4 - 3 Etude d'autres mélangeurs

Les mélangeurs avec agitateur mécanique ont été beaucoup moins étudiés ; les constructeurs des appareillages industriels fournissent évidemment la consommation de puissance relative au dispositif commercialisé (R5), mais leur information est accompagnée d'une grande marge de sécurité.

Dans le but de comparer différents types de mélangeurs, STANGE (S7) et MUELLER W. (M4) ont choisi la consommation d'énergie conduisant à un degré de mélange donné ; ils constatent qu'aux faibles vitesses de rotation, les agitateurs horizontaux à socs et à pales sont les plus efficaces. Les résultats expérimentaux montrent que le diamètre et la longueur du mélangeur ainsi que le taux de remplissage sont les paramètres déterminants.

MULLER F (M5) a étudié quantitativement la puissance P consommée par divers appareils. Il propose, résultat d'une analogie avec les mélangeurs pour liquides, l'équation suivante :

$$P = C_w^{1/2} \rho R_a^3 w^3 a Z_e \quad \text{III - 15}$$

dans laquelle, ρ est la masse spécifique du matériau, R_a , le rayon moyen du système d'agitation, a , son maître-couple moyen, w , sa vitesse angulaire et Z_e , un nombre qui caractérise la masse du lit instantanément emportée par le moyen d'agitation.

L'étude expérimentale a fourni :

$$C_w = K \left(\frac{w^2}{w_c^2} \right)^\alpha \cdot \tau \quad \text{III - 16}$$

avec $w_c = 2 \pi N_c$

dans laquelle K et α varient avec le type de mélangeur :

$K = 116$ et $\alpha = -1$ dans le cas de l'agitateur à deux pales diamétrales ;

$K = 71,1$ et $\alpha = -0,92$ pour les agitateurs à socs.

Les études faites sur les agitateurs à spirales (Z1) et les convoyeurs hélicoïdaux ne sont encore que des descriptions de fonctionnement et ne fournissent pas de résultats facilement extrapolables.

III - 4 - 4 Introduction de le mécanique des sols pour la détermination du travail des pales.

Nous avons vu au paragraphe III - 2 - 3 - 2 que la détermination des surfaces de rupture dans un milieu agité permettait d'accéder au travail de la pale. BAGTER (B7) a calculé le couple résistif d'une

portion de lit comprise entre le plan de la pale et une spirale logarithmique passant par le bord inférieur de celle-ci. Les résultats obtenus sont légèrement inférieurs aux valeurs expérimentales.

De son côté NOVOSAD (N3) a établi, à partir des lignes de glissement dans le matériau, une nouvelle expression pour le coefficient de poussée qui permet de calculer le couple théorique C exercé par un lit contenu dans un cylindre vertical tant que la profondeur d'immersion sur une pale ne dépasse pas une valeur critique (N4) ; il est donné par la relation :

$$C = 0,25 \eta \ h \ \rho \ g \ a \ Da^2 \quad \text{III - 17}$$

dans laquelle η est la caractéristique dynamique ou coefficient de poussée (cf. l'équation III - 6), h la profondeur d'immersion moyenne, a , la largeur de la pale et Da le diamètre de l'agitateur.

Malheureusement, les résultats expérimentaux diffèrent sensiblement des valeurs fournies par l'équation III - 17 puisqu'ils satisfont la relation :

$$C = 0,48 \ \eta^{1,05} \ \rho \ g \ h^{1,7} \ a^{0,75} \ Da^{1,55} \quad \text{III - 18}$$

On remarque en particulier, sur l'équation III - 18 que le couple nécessaire à l'agitation n'est plus proportionnel au maître-couple de la pale. NOVOSAD et STANDART (N4) expliquent cette divergence en invoquant les effets de bords de la pale et le fait que la valeur de η a été établie en géométrie bidimensionnelle.

Dans une publication ultérieure, NOVOSAD (N5) fait état de travaux tendant à préciser l'importance des effets de bord de la pale, mais les résultats obtenus sont inexploitable.

III - 4 - 5 Conclusion

Il ressort de notre recherche bibliographique que l'étude du mélange et de la mise en oeuvre des matériaux granulaires a pris une extension considérable au cours des dernières années.

Il nous semble intéressant de préciser qu'OLDSHUE (O2) publie tous les ans au mois de Novembre dans la revue "Industrial and Engineering Chemistry" une synthèse des travaux dans ce domaine.

Cependant, les études faits jusqu'à présent n'ont souvent donné lieu qu'à des corrélations empiriques. Les auteurs se heurtent toujours dans leurs essais d'interprétation théorique au problème de la définition de caractéristiques invariantes pour le matériau granulaire ; pour beaucoup de chercheurs, ces milieux changent de propriétés quand on passe de l'état de repos à un état de mouvement.

o o
o

- SOMMAIRE -

IV - 1 INTRODUCTION

IV - 2 APPAREILLAGE ET TECHNIQUE EXPERIMENTALE

IV - 3 DESCRIPTION DE L'APPAREILLAGE

IV - 3 - 1 Description de l'appareillage

IV - 3 - 2 Le mélangeur

IV - 3 - 3 Le couplemètre

IV - 3 - 4 Les passages tournants

IV - 3 - 5 L'intégrateur

IV - 3 - 6 Conclusion

IV - 4 MESURES PRELIMINAIRES

IV - 4 - 1 Etalonnage du torsiomètre

IV - 4 - 2 Etude des frottements

IV - 4 - 3 Reproductibilité des mesures

IV - 5 ETUDE DU COUPLE MOYEN

IV - 5 - 1 Paramètres étudiés

IV - 5 - 2 Philosophie du dépouillement des résultats

IV - 5 - 3 Dépouillement graphique

IV - 5 - 4 Optimisation de la fonction empirique

IV - 5 - 5 Conclusion

IV - 6 MESURE DU COUPLE INSTANTANE

IV - 6 - 1 Principe des mesures

IV - 6 - 2 Résultats concernant le couple au démarrage

IV - 6 - 3 Etude du couple maximal en régime

IV - 7 CONCLUSION

- NOTATIONS -

a	Maître-couple des pales par unité de longueur
C	Couple réel sollicitant l'agitateur ou le corps d'épreuve
C _{max}	Couple maximal en régime d'agitation
C _D	Couple au démarrage
C*	Couple rapporté à l'unité de longueur du mélangeur
$\bar{C}$	Couple moyen sollicitant l'agitateur
C _{ap}	Capacité équivalente de l'intégrateur
D	Diamètre du mélangeur
D _p	Diamètre des particules
E	Module d'élasticité ou module de YOUNG
Fr	Nombre de FROUDE = $\frac{N^2 D}{g}$
Fr _R	Nombre de FROUDE correspondant au changement de régime
g	Accélération de la pesanteur
K	Constante
l	Longueur élémentaire de référence
N	Vitesse de rotation de l'agitateur
P	Puissance consommée par le moteur
P _d	Puissance fournie à la dynamofrein
Res	Résistance de la jauge d'extensométrie
res	Résistivité du fil constituant les jauges
r _b	Rayon de la barre de torsion
S	Section du corps d'épreuve
s	Section du fil des jauges
T	Base du temps de l'intégrateur
V	Tension d'alimentation du pont de WHEATSTONE
v	Signal de déséquilibre du pont

CHAPITRE IV

ETUDE EXPERIMENTALE DU COUPLE NECESSAIRE A L'AGITATION

w	Module de POISSON
X	Caractéristique rhéologique globale du lit granulaire
δ	Allongement relatif
ξ	Rendement de l'installation
μ	Angle de frottement interne
ρ	Masse spécifique apparente du lit
Σ	Charge appliquée dans la direction de déformation
σ	Contrainte appliquée dans la direction de déformation
τ	Taux de remplissage du mélangeur

IV - 1 INTRODUCTION

Notre étude expérimentale des mélangeurs horizontaux avec agitateur du type double cadre, nous a conduit à déterminer :

- 1) la variation du couple nécessaire à l'agitation du lit granulaire ;
- 2) l'aire de contact solide-paroi ; cette dernière grandeur sera exploitée lors de l'étude du transfert de chaleur entre la paroi et le lit agité.

Dans ce chapitre, nous avons rassemblé nos résultats concernant l'étude du couple nécessaire à l'agitation : après une description de l'appareillage et de la technique expérimentale utilisés, nous analyserons les résultats en vue d'établir des équations empiriques permettant de relier le couple aux différents paramètres significatifs. On tentera au Chapitre VI de justifier théoriquement l'influence du taux de remplissage et de l'angle de frottement interne.

IV - 2 APPAREILLAGE ET TECHNIQUE EXPERIMENTALE

L'agitateur utilisé pour mélanger le lit granulaire est du type double cadre : le couple instantané n'étant pas constant, on a préféré relier le couple moyen aux différents paramètres envisagés. Néanmoins, le couple instantané a été enregistré ; on verra que cette information est importante pour vérifier le modèle proposé au Chapitre VI : elle l'est également pour dimensionner les appareillages industriels : en particulier le couple au démarrage peut, dans certains cas, être la grandeur déterminante pour le calcul de l'agitateur et de son système d'entraînement. Pour accéder au couple instantané, on a conçu un appareillage dont les dispositifs d'entraînement, de mesure et d'enregistrement ont un temps de réponse faible.

IV - 2 - 1 Choix de la technique de mesure

Plusieurs méthodes sont envisageables pour déterminer le travail nécessaire à l'agitation d'un lit granulaire ; nous en avons plus particulièrement examiné deux dont la mise en oeuvre est assez simple :

IV-2-1-1 Mesure de la puissance fournie par le moteur

La première technique consisterait à relier la puissance effectivement fournie à l'agitateur, à la puissance consommée par le moteur. Elle nécessite un étalonnage préalable effectué en plaçant à la sortie de la boîte de vitesses un dynamo-frein servant à la fois d'instrument de mesure et de charge. On obtient ainsi :

$$P_M = f(P_d) \quad \text{IV - 1}$$

dans laquelle P_d est la puissance électrique fournie à la dynamo-frein exerçant le couple résistif et P_M la puissance consommée par le moteur lorsqu'il fournit la puissance P_d à la sortie de la boîte de vitesses. On a généralement :

$$P_M = \frac{1}{\xi} P_d \quad \text{IV - 2}$$

ξ est le rendement de l'installation ; il reste constant dans un grand domaine de variation de P_d .

IV-2-1-2 Technique extensométrique

L'application d'un couple provoqué sur une barre de torsion solidaire de l'agitateur des déformations qui peuvent être détectées à l'aide de jauges extensométriques. On utilise généralement quatre jauges collées symétriquement à la surface de la barre. Ces quatre jauges qui constituent des résistances variables sont montées en pont de WHEATSTONE. Quand la barre ne subit aucune contrainte, le pont est équilibré et on ne lit aucun signal sur le galvanomètre ; par contre, lorsqu'on applique un couple C , les fibres externes de la barre s'allongement proportionnellement à la charge, soit :

$$\frac{\Delta l}{l} = k C \quad \text{IV - 3}$$

Les jauges subissent la même déformation ; il s'ensuit une variation de leur résistance et un déséquilibre du pont de WHEATSTONE.

On montrera plus loin que le signal de déséquilibre est proportionnel au couple appliqué ; son enregistrement permet donc de connaître à tout instant les efforts sollicitant l'agitateur.

IV-2-1-3 Méthode retenue

La précision, de l'ordre de 1 à 2%, n'est pas significativement différente pour les deux méthodes de mesure.

Nous avons finalement retenu la technique extensométrique car :

- a) elle permet de s'affranchir de la puissance consommée par les frottements au niveau du moteur et de la boîte de vitesses si l'on place la barre de torsion juste à l'entrée du mélangeur.
- b) la méthode d'étalonnage est beaucoup plus rapide
- c) elle fournit un signal qui peut être envoyé sur un intégrateur de manière à obtenir le couple moyen.

IV - 3 DESCRIPTION DE L'APPAREILLAGE

IV-3-1 Description générale

L'appareil réalisé pour étudier le couple nécessaire à l'agitation est décrit sur la figure IV - 1. Il comprend :

- un moteur asynchrone-synchronisé d'une puissance de 1 KW, tournant à vitesse constante quelle que soit la charge,
- une boîte de vitesses KEPES (2) permettant d'obtenir 24 rapports de démultiplication en progression géométrique de 2 à 12 000,
- un réducteur 10/1 (3) ; la boîte de vitesses ne tolérant qu'un couple maximal de 3 m.N, la présence de ce réducteur permet de fournir un couple de 30 m.N sur l'arbre de l'agitateur,
- une barre de torsion (4) située entre l'agitateur et le réducteur ; elle sera décrite en détail au paragraphe IV - 3 - 3,
- le mélangeur proprement dit (5),

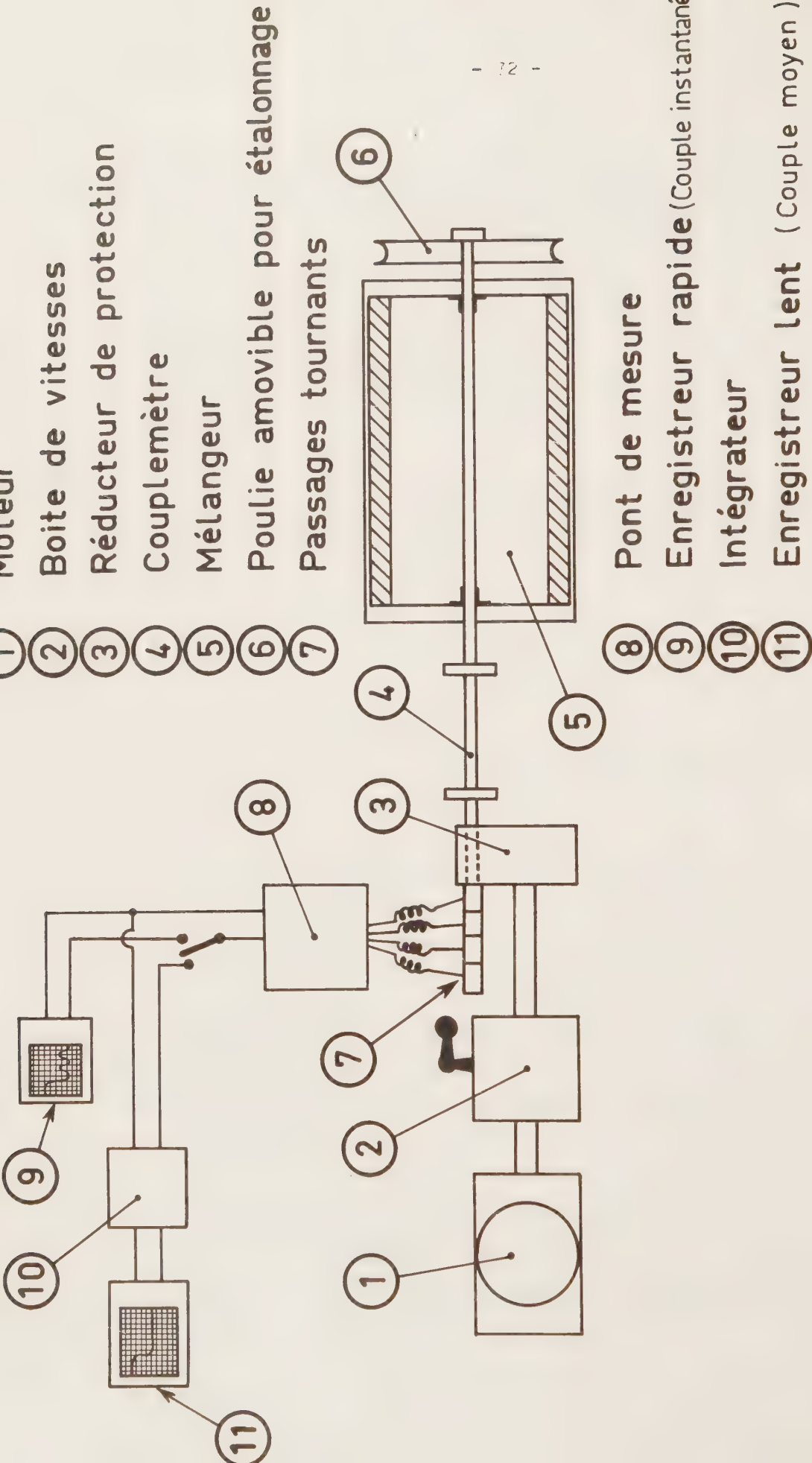


Fig. IV-1 . Schéma de principe du dispositif de mesure du couple .

- un pont d'extensométrie (8) que l'on peut schématiser par une alimentation stabilisée et un amplificateur continu-continu ; il est relié aux jauges collées sur la barre de torsion par l'intermédiaire de passages tournants (7) que l'on a fixé sur le réducteur dans le prolongement du couplemètre,

- deux enregistreurs qui reçoivent le signal issu du pont ; pour l'étude du couple moyen, le signal traverse un intégrateur (10) avant d'attaquer l'enregistreur (11) à faible bande passante ; dans le cas de la mesure du couple instantané, on utilise un enregistreur rapide SEDEME (9) dont on précisera le fonctionnement en temps utile ; il convient alors que les fils électriques de liaison soient blindés et bien isolés pour éviter les effets parasites des champs électromagnétiques régnant autour de l'installation.

IV - 3 - 2 Le mélangeur

Le mélangeur étudié est semblable à ceux fonctionnant dans l'industrie ; en particulier les rapports de la largeur et de la longueur des pales au diamètre du mélangeur ont été respectés au point de vue ordre de grandeur.

Le mélangeur est un cylindre horizontal de 400 mm de longueur et 200 mm de diamètre intérieur. Il est réalisé en acier inoxydable et soigneusement poli sur sa surface interne ; les parois latérales sont constituées de disques de plexiglass de 8 mm d'épaisseur. Un entonnoir tronconique, servant au remplissage, a été fixé au milieu de la génératrice supérieure du cylindre.

L'arbre de l'agitateur supporte deux joues en plexiglass sur lesquelles sont fixées les pales. Entre les joues et la paroi, on a prévu une couronne de feutre pour arrêter les billes.

Les pales sont fixées à l'aide de deux goujons ; dans le but d'en faire varier le maître-couple, c'est-à-dire la projection radiale, on a utilisé comme le montre la figure IV - 2, deux méthodes :

- la première consiste à incliner une pale de 40 mm en plaçant le goujon interne dans différents trous centrés sur le goujon extérieur,

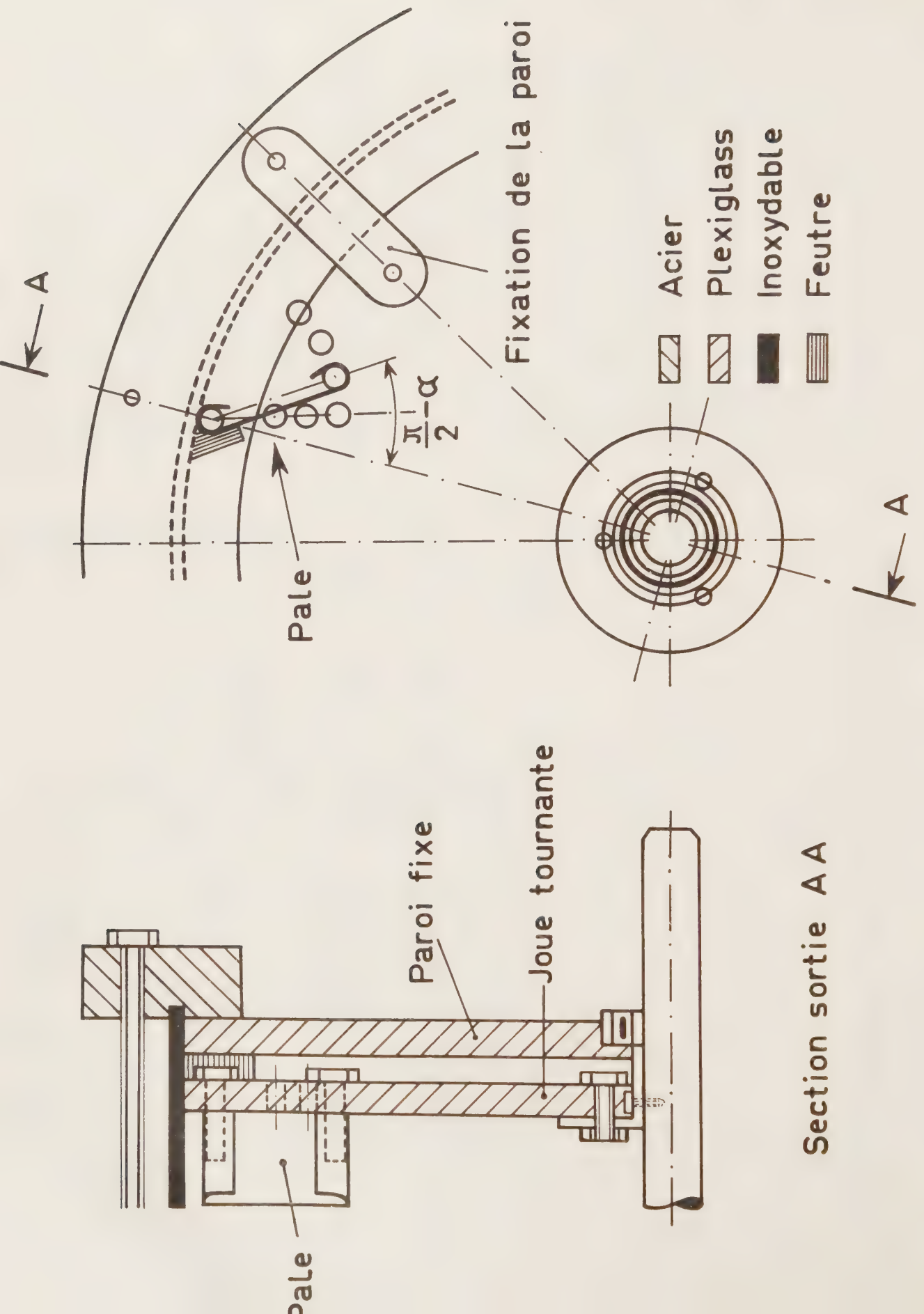


Fig. IV-2. Extrémité latérale du mélangeur.

- la seconde repose du l'emploi de pales de largeur plus faible (30 et 20 mm) qui font un angle de 75° avec la tangente au mélangeur.

Au cours des manipulations, les trous qui ne servent pas sont bouchés par du ruban adhésif transparent.

La principale difficulté que nous avons rencontrée lors de la mise au point du mélangeur a résulté du coincement des billes entre la paroi et les pales. Nous avons pallié cet inconvénient en garnissant leur bord extérieur d'une bande de matière plastique alvéolée très souple recouverte d'un ruban adhésif plastifié. Ce dispositif a permis d'obtenir un couple de frottement très faible ; l'emploi de la bande plastifiée empêche les billes de verre de pénétrer dans les alvéoles et assure une bonne résistance mécanique à l'usure.

Il n'a pas été prévu de bouchon de vidange car l'étude de l'influence du taux de remplissage se fait en chargeant progressivement le mélangeur. Par ailleurs, nous avons estimé préférable de démonter l'appareil après l'étude de chaque diamètre de billes ; on peut ainsi nettoyer le mélangeur et les pales de l'agitateur ce qui évite de modifier les propriétés rhéologiques du lit en augmentant la dispersion granulométrique de la charge suivante.

Tel qu'il est conçu, le dispositif permet d'observer à tout instant la forme du lit granulaire puisque les faces terminales sont transparentes.

IV - 3 - 3 Le couplemètre

IV-3-3-1 Introduction

Le calcul de la barre de torsion qui constitue l'élément sensible du capteur est du ressort de la résistance des matériaux ; avant de l'aborder, nous rappellerons quelques définitions indispensables ainsi que les notions essentielles relatives à l'extensométrie.

On précisera les précautions qui ont dû être prises pour obtenir des résultats satisfaisants.

IV-3-3-2 Définitions préliminaires

Les notions de contraintes et de déformations d'un solide sont intuitives dans le cas simple des efforts appliqués suivant une direction unique, comme il est d'usage de le faire avec les machines d'essai des matériaux.

Lorsqu'une pièce cylindrique de section S est soumise à une traction Σ suivant la direction de la plus grande dimension, elle s'allonge dans cette direction : soit δ_1 l'allongement par unité de longueur. Simultanément un segment transversal c'est-à-dire perpendiculaire au premier se contracte : représentons par δ_2 sa contraction par unité de longueur.

Entre l'allongement δ_1 et la contraction δ_2 , on vérifie expérimentalement qu'il existe, du moins jusqu'à une certaine limite, la relation de proportionnalité :

$$\delta_2 = - w \delta_1 \quad \text{IV - 4}$$

dans laquelle w est le coefficient de POISSON, caractéristique du corps étudié ; voisin de 0,3 pour les métaux, il est égal à 0,5 pour les corps qui se déforment sans variation de volume.

D'autre part, chacun des allongements δ_1 et δ_2 est proportionnel à la contrainte appliquée σ c'est-à-dire à la force par unité de surface $\frac{\Sigma}{S}$; on a donc :

$$\sigma = E \delta_1 \quad \text{IV - 5}$$

Le facteur de proportionnalité E est le module d'élasticité ou module de YOUNG qui s'exprime en unité de pression ; il est constant tant que les efforts appliqués sont relativement faibles mais ne l'est pas dans tout le domaine élastique.

IV-3-3-3 Principe des jauges d'extensométrie

La connaissance des déformations permet de calculer les contraintes lorsque l'on connaît les lois qui lient ces grandeurs ; on s'efforce de travailler dans le domaine élastique proportionnel.

D'une manière générale, la grandeur physique à mesurer (force, couple, pression, etc.) est appliquée à un corps d'épreuve sur lequel sont collées des jauges qui détectent les déformations.

Sous sa forme la plus simple, une jauge est constituée par un fil très fin collé sur un support très mince et arrangé de manière que la majeure partie de sa longueur soit distribuée parallèlement à la direction des déformations subies par le corps d'épreuve.

Dans notre étude, nous avons utilisé des jauges pelliculaires BUDD dont l'épaisseur est inférieure à 30 microns. (Il existe également des jauges en semi-conducteurs (silicium N/P) qui sont de 50 à 100 fois plus sensibles).

Examinons la déformation d'une jauge pelliculaire ; sa résistance nominale Res est donnée par :

$$Res = res \frac{l}{s} \quad IV - 6$$

en désignant par res , la résistivité du métal ; l , la longueur du fil constituant la partie active de la jauge et s , sa section.

On obtient par dérivation logarithmique et en confondant les faibles variations des grandeurs physiques avec les différentielles mathématiques :

$$\frac{\Delta Res}{Res} = \frac{\Delta res}{res} + \frac{\Delta l}{l} - \frac{\Delta s}{s} \quad IV - 7$$

ou encore, en tenant compte des définitions données précédemment :

$$\frac{\Delta Res}{Res} = \frac{\Delta res}{res} + \delta_1 + 2 w \delta_1 = \frac{\Delta res}{res} + \delta_1 (1 + 2 w) \quad IV - 8$$

L'équation IV - 8 montre que si la résistivité du matériau reste constante au cours de la déformation du fil, on a :

$$\frac{\Delta Res}{Res} = K \delta_1 \quad IV - 9$$

La constante K varie avec le métal constituant la jauge (A2).

IV-3-3-4 Principe du torsiomètre

Dans une barre de torsion de rayon r_b soumise au couple C , les déformations principales sont inclinées de 45° par rapport à l'axe ; elles sont données (A2) par :

$$\delta_1 = \delta_2 = \frac{2 C (1 + w)}{\pi E r_b^3} \quad \text{IV - 10}$$

Considérons quatre jauges orientées selon les directions de déformation comme le montre la figure IV - 3 ; ces jauges sont montées en pont de Wheatstone sous la tension constante V ; si $\Delta \text{Res}_1, \Delta \text{Res}_2, \Delta \text{Res}_3$, et ΔRes_4 désignent les variations de leur résistance sous l'action des déformations, on montre aisément que la tension de déséquilibre est donnée par :

$$v = \frac{V}{4} \left(\frac{\Delta \text{Res}_1}{\text{Res}_1} - \frac{\Delta \text{Res}_2}{\text{Res}_2} + \frac{\Delta \text{Res}_3}{\text{Res}_3} - \frac{\Delta \text{Res}_4}{\text{Res}_4} \right) \quad \text{IV - 11}$$

En tenant compte de IV - 9 et IV - 10, et en supposant que les quatre jauges sont identiques, l'équation IV - 11 se met finalement sous la forme :

$$v = K V \delta_1 = \frac{2 K (1 + w) V}{E \pi r_b^3} C \quad \text{IV - 12}$$

La relation IV - 12 établit donc une correspondance linéaire entre le signal de déséquilibre et le couple appliqué au corps d'épreuve quand E et w sont constants.

IV-3-3-5 Réalisation du torsiomètre

Dans l'équation IV - 12 interviennent la tension d'alimentation fournie par le pont d'extensométrie et le coefficient de la jauge caractéristique du type choisi ; les erreurs de linéarité introduites par ces deux grandeurs sont négligeables puisque nous utilisons un matériel approprié.

Par contre, E et w ne sont constants que dans un certain domaine de déformation. On utilise généralement comme limite supérieure du domaine de travail, une charge conduisant à un allongement spécifique

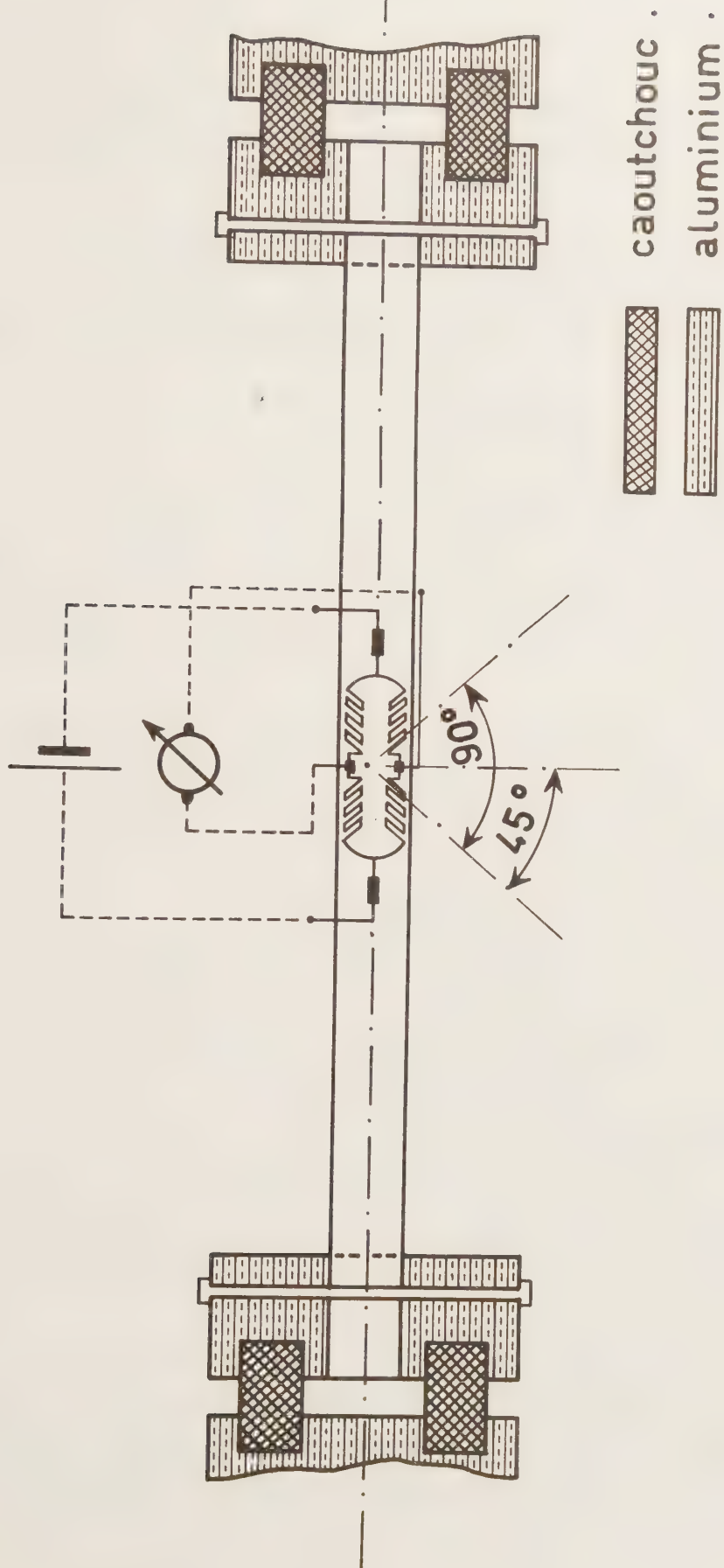


Fig .IV-3. Torsiomètre .

$\delta_1 = 10^{-3}$. L'application numérique de l'équation IV - 11 fournit alors le rayon de la barre de torsion pour différents matériaux quand on connaît la valeur du couple maximal.

Les essais préliminaires ont conduit à choisir 10 m.N comme valeur du couple maximal nécessaire à l'agitation du lit granulaire.

Pour que la réalisation technologique du capteur ne pose pas trop de problèmes, le corps d'épreuve a été usiné à partir d'une barre de Zicral (alliage d'Aluminium) fournie par WEBER (PARIS). Le choix de ce matériau, très déformable, a permis d'utiliser un cylindre d'un diamètre suffisamment pour que la flexion lors de l'attaque de l'outil soit faible, et pour que le collage des jauges soit facile.

Après un traitement thermique approprié (trempe à l'eau de 460°C à 30°C puis revenu de 8 heures à 130/140°C), ce métal a pour module d'YOUNG $E = 7\,200\text{ Kg/mm}^2$ et pour coefficient de POISSON : $w = 0,34$.

Le calcul a conduit à usiner une barre de $12,4 \pm 0,02\text{ mm}$ de diamètre et de 200 mm de longueur ; dans ces conditions, l'erreur de linéarité, inférieure à 0,2 % est du même ordre de grandeur que celle des jauges et de l'amplificateur du pont d'extensométrie.

IV-3-3-6 Précautions de montage

Afin de bien mesurer les déformations principales telles que $\delta_1 = -\delta_2$ (équations IV - 10), on a utilisé des rosettes constituées par deux jauges dont les fils sont à angle droit ; la bissectrice, matérialisée sur le support, doit être disposée selon la génératrice de la barre de torsion.

Le pont de résistance est constitué par deux rosettes ; elles sont collées au milieu de la barre et diamétralement opposées pour compenser la flexion. Sur la figure IV - 3, les quatre résistances ont été représentées sur la même face dans le but de clarifier le dessin.

Précisons que la barre de torsion est entraînée par des accouplements souples pour éliminer les contraintes parasites dues à l'encastrement ; par ailleurs, deux goupilles de protection en acier

de 1,8 mm de diamètre évitent de faire travailler le capteur au-delà de la limite élastique ; elles sont calculées pour rompre si le couple devient supérieur à 10 m. N.

IV - 3 - 4 Les passages tournants

Le couplémètre nécessite l'emploi de contacts tournants pour assurer la liaison entre les jauges et le pont de mesure.

IV-4-4-1 Etude préliminaire

On trouve dans le commerce de nombreux types de contacts tournants correspondant à différentes conditions opératoires ; il ne nous a pas semblé utile, pour notre étude, d'acquérir un appareil perfectionné étant donné que la vitesse de rotation maximale du capteur est inférieure à 100 tours par minute.

Le système réalisé utilise le mercure comme relai électrique. Deux problèmes se sont posés :

- trouver un contact mercure-métal purement ohmique et de résistance faible ;

- éliminer la présence de toute bulle d'air pour éviter l'effet capacitif, la variation de la surface de contact et surtout l'oxydation de l'amalgame formé.

Ils ont été résolus par l'utilisation :

- a) du couple mercure saturé en laiton - laiton amalgamé comme contact ohmique,

- b) d'un système de bagues concentriques remplies de mercure pour éliminer l'air.

IV-3-4-2 Description des contacts tournants

Les passages tournants sont représentés sur la figure IV - 4 ; ce sont essentiellement quatre godets à mercure : un pour chaque fil du pont de WHEATSTONE. Un godet est obtenu en assemblant deux tubes de laiton

Vers enregistreur

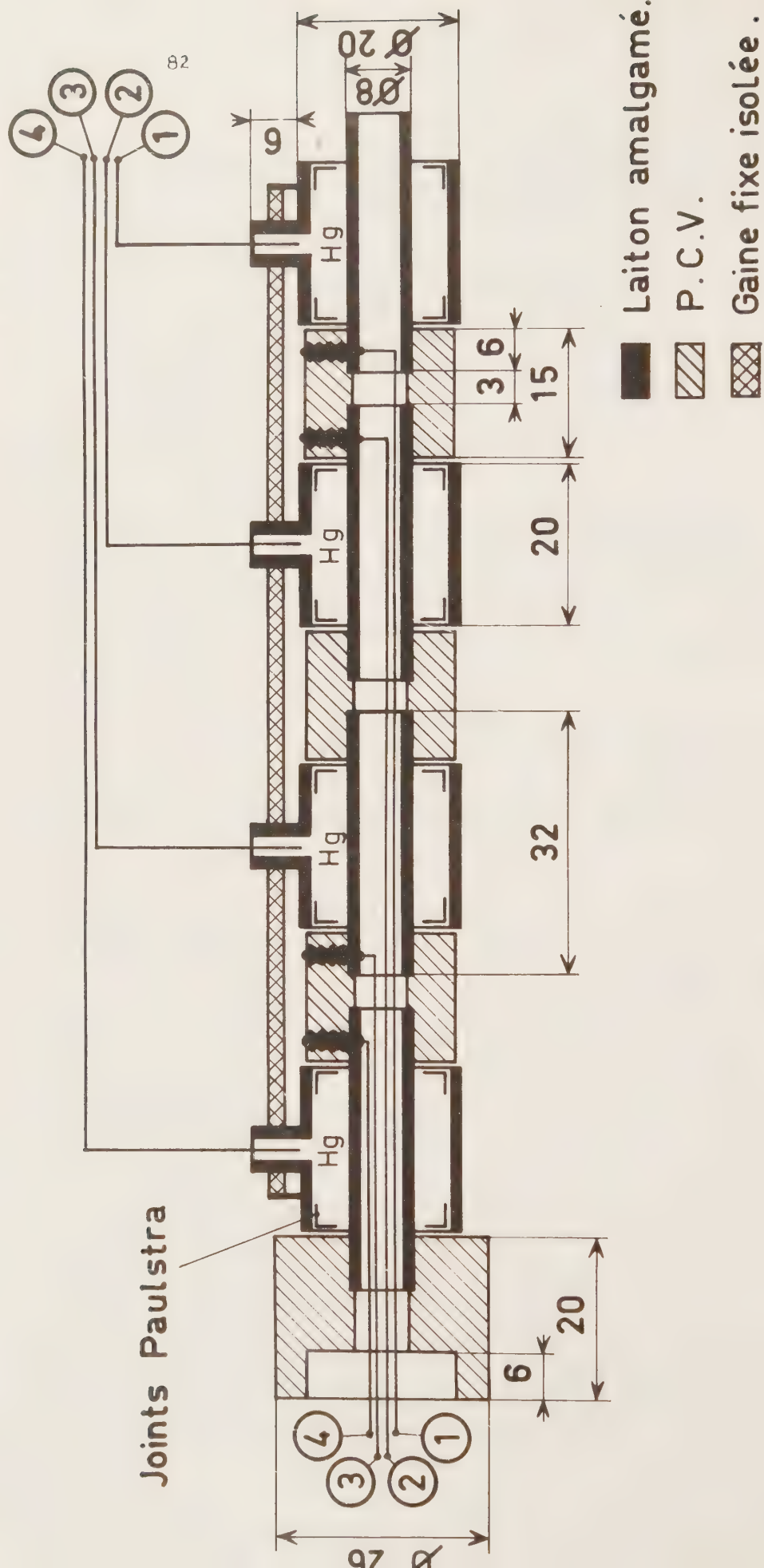


Fig.IV-4. Passages tournants .

amalgamé centrés à l'aide de deux joints PAULSTRA faisant l'étanchéité entre les deux parois cylindriques tout en permettant la rotation de la bague intérieure.

Une ouverture sur le cylindre extérieur permet le remplissage en mercure de la cavité ainsi formée et le raccordement au pont de mesure. Les fils provenant du torsiomètre cheminent dans l'axe des tubes internes. Ils sont soudés à l'extérieur à des vis solidaires de ces derniers de manière à éviter l'attaque de l'étain par diffusion du mercure à travers le laiton.

Les différents godets sont reliés entre eux par des bagues isolantes en polychlorure de vinyle (P.C.V.) emmanchées à force et goupillées. L'ensemble est maintenu en place par une gouttière fixe isolée constituant le support.

IV - 3 - 5 L'intégrateur

Le signal V fourni par l'ensemble : torsiomètre, passages tournants, pont d'extensométrie, correspond au couple instantané sollicitant le corps d'épreuve. Le signal, amplifié par le pont, peut être directement envoyé sur un enregistreur ; dans ce cas les fluctuations du couple lors de l'attaque et du déchargement des pales donnent sur l'enregistrement une courbe dont il est difficile de prendre la valeur moyenne. Nous avons donc conçu un intégrateur électronique qui fournit directement le couple moyen.

IV-3-5-1 Principe

Le principe de cet intégrateur est celui d'un filtre actif ; il est basé sur la charge et la décharge d'une capacité ; la capacité est chargée par un courant proportionnel au signal à intégrer en même temps qu'elle se décharge lentement dans le circuit de mesure. A l'équilibre, c'est-à-dire au bout de cinq périodes environ, la quantité d'électricité qui entre est égale à celle qui sort et l'on obtient dans la ligne de mesure une intensité égale à la valeur moyenne du signal d'entrée.

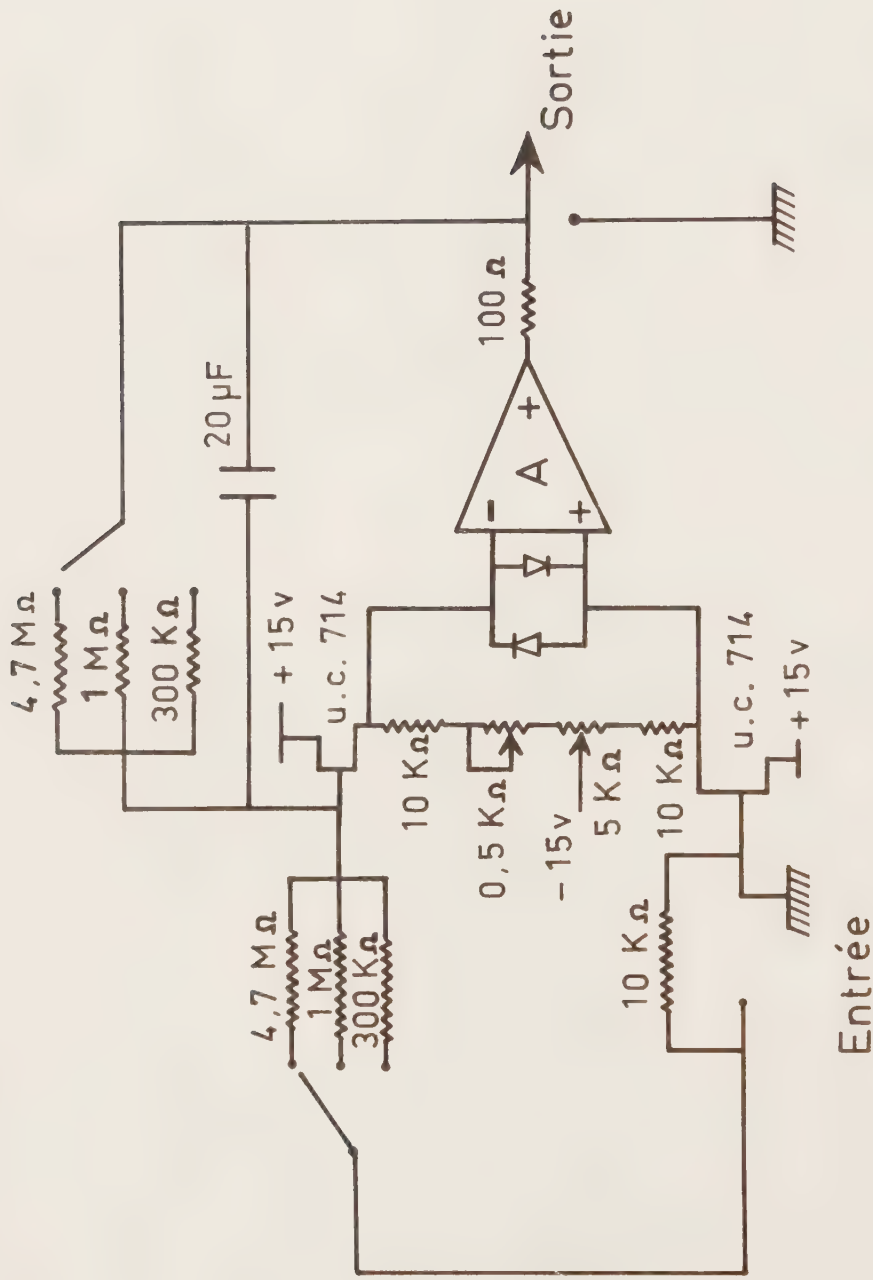


Fig. IV-5 . - Intégrateur

Alimentation +15

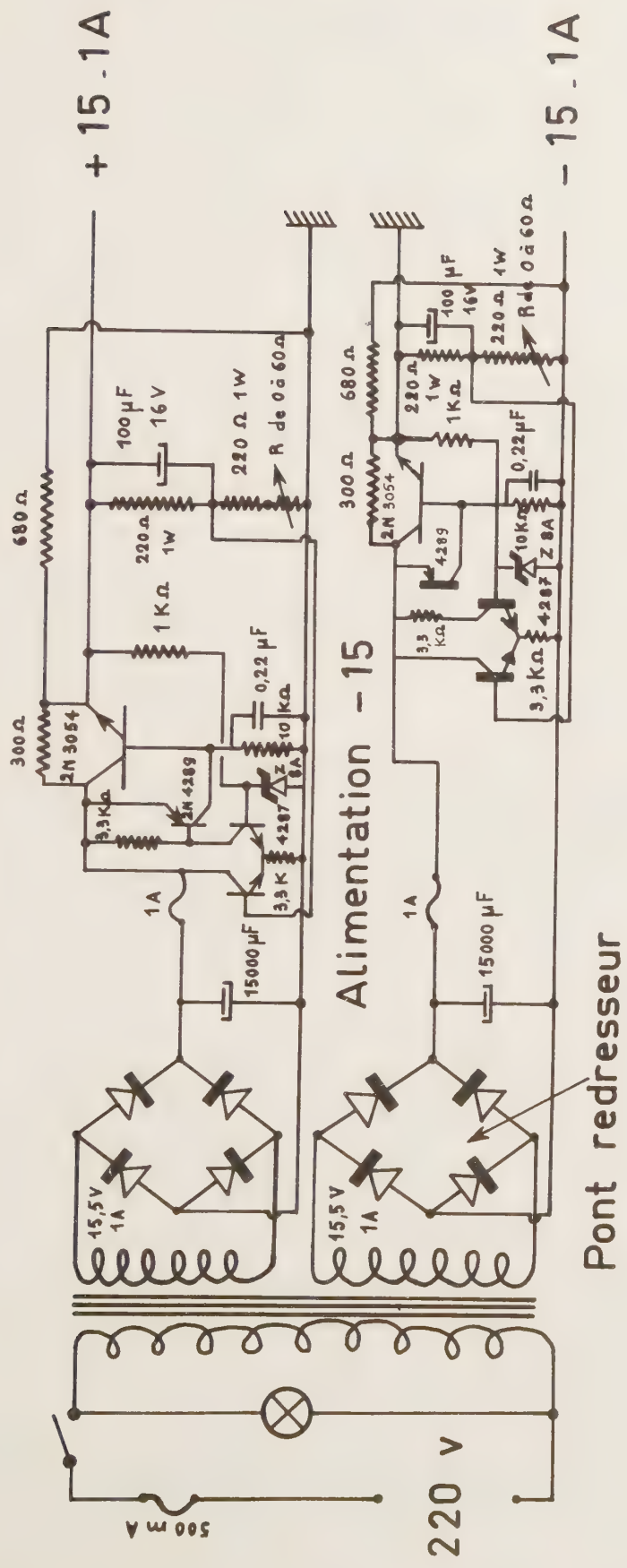


Fig. IV-6 Alimentation stabilisée .

IV-3-5-2 Conception

L'intégrateur* proprement dit est schématisé sur la figure IV - 5. Le dispositif électronique comprend :

a) un circuit résistance (Res) capacité (Cap) dont la constante de temps T est donnée par la relation :

$$\text{Res. Cap. } \frac{2 \pi}{T} = 1 \quad \text{IV - 13}$$

Un jeu de trois résistances permet de faire varier cette constante de temps de 30 s à 5 mn suivant les conditions expérimentales.

b) un amplificateur opérationnel avec son électronique associée pour compenser la chute de tension dans le circuit.

Par ailleurs, le système d'amplification nécessite l'emploi d'une alimentation stabilisée délivrant + 15 V et - 15 V (fig.IV - 6).

IV - 3 - 6 Conclusion

Dans ce paragraphe, nous avons décrit les appareils qui ont été entièrement réalisés dans notre laboratoire. Quelques précisions sur le fonctionnement d'autres appareils utilisés seront données en temps voulu.

IV - 4 MESURES PRELIMINAIRES

Après mise au point et élimination des parasites, nous avons vérifié que l'appareillage permet d'effectuer des mesures correctes et reproductibles dans toutes les conditions opératoires.

IV - 4 - 1 Etalonnage du torsiomètre

Il nous a semblé préférable d'étalonner le torsiomètre dans des conditions analogues au problème expérimental.

(*) Nous tenons à remercier ici les membres du Service Informatique et plus particulièrement Monsieur J.C. LANOUE pour les conseils judicieux qu'ils nous ont donnés lors de la réalisation de cet intégrateur.

Cet étalonnage a donc été effectué en dynamique par élévation des masses connues à l'aide d'une poulie solidaire de l'arbre de l'agitateur (voir figure IV, - 1) et utilisée comme treuil.

Au cours de cette opération, les joues supportant les pales ont été démontées pour éviter tout frottement parasite.

L'étalonnage a été effectué avec et sans l'intégrateur ; étant donné que seule la mesure absolue du couple moyen est utile pour le dépouillement des résultats, puisque le couple instantané sera comparé au couple moyen, nous n'avons rapporté sur la figure IV - 7 que les mesures relatives à l'étalonnage avec l'intégrateur. On peut constater que le système de mesure a une réponse linéaire dans tout le domaine expérimental.

On a ensuite vérifié qu'en exerçant un couple déterminé (0,5 puis 3m.N), en accrochant des masses connues (500 g puis 3 Kg) à la poulie ($r = 10$ cm) on obtient la même déviation du spot du galvanomètre quelle que soit la vitesse de rotation de l'agitateur et par conséquent du capteur et des passages tournants.

IV - 4 - 2 Etude des frottements

L'agitateur a été conçu pour racler toutes les particules à la paroi, car un léger jeu, au niveau du bord extérieur des pales, entraîne, pour l'une au moins des granulométries de billes étudiées, des coincements parasites qui perturbent les mesures. L'impossibilité d'éliminer tous les frottements nous a conduit à les mesurer systématiquement ; on a adopté la méthode suivante : avant chaque série de manipulations, on place 100 g de billes dans le mélangeur et on mesure le couple résistant aux différentes vitesses de rotation de l'agitateur ; ces mesures sont reprises à l'issue de la série de manipulations après vidange de l'appareil afin de vérifier que le couple de frottement n'a pas sensiblement évolué au cours des expériences. Les frottements sont ensuite retranchés du couple, transmis par le torsiomètre pour obtenir le couple réel absorbé par le lit granulaire ; ils sont inférieurs ou égaux à 30 % du couple d'agitation correspondant au plus faible des taux de remplissage envisagés, c'est-à-dire $\tau = 0,09$.

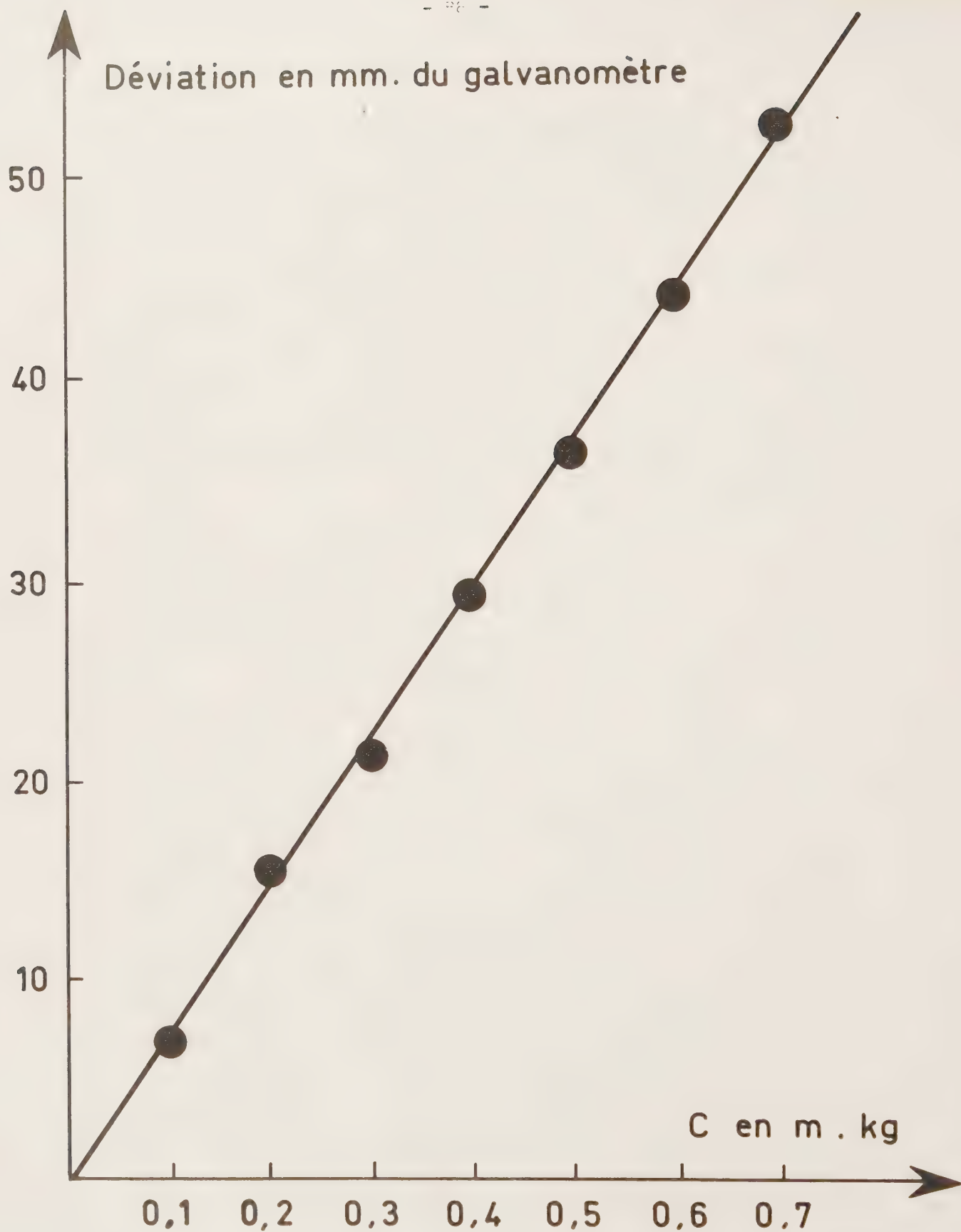


Fig. IV-7. Etalonnage avec intégrateur .
(Base de temps = 30 secondes .)

IV - 4 - 3 Reproductibilité des mesures

Pour s'assurer de la reproductibilité des résultats et de la fiabilité du capteur, on a toujours terminé chaque série de manipulations par une expérience identique à la première ; on a constaté que les deux mesures étaient souvent identiques et toujours en bon accord.

IV - 5 ETUDE DU COUPLE MOYEN

IV - 5 - 1 Paramètres étudiés

On a étudié la variation du couple moyen nécessaire à l'agitation du lit granulaire en fonction des paramètres suivants :

- vitesse de rotation de l'agitateur N en tours par seconde
- taux de remplissage τ
- maître-couple des pales par unité de longueur a
- diamètre des particules d_p

Si l'on remarque que les opérations de mélange s'effectuent dans le champ de pesanteur d'intensité g et si l'on cherche à tenir compte des caractéristiques rhéologiques du milieu granulaire par une certaine propriété sans dimension X, l'analyse dimensionnelle conduit à une expression de la forme :

$$\frac{\bar{C}}{\rho_D^4 N^2} = \text{fonction} \left(\frac{N^2 D}{D}, \frac{a}{D}, \frac{d_p}{D}, X \right) \quad \text{IV - 14}$$

dans laquelle le nombre de termes sans dimension est fixé par le théorème de VASCHY-BUCKINGHAM.

Dans cette équation entre groupes sans dimensions qui suppose que les effets de bouts sont négligeables, $\bar{C}$ représente le couple moyen par unité de longueur du mélangeur, ρ la masse spécifique apparente du matériau granulaire et D le diamètre du mélangeur.

IV - 5 - 2 Philosophie du dépouillement des résultats

L'étude de l'influence des différents paramètres nous a conduits à effectuer quelques 700 mesures indépendantes du couple ; elles correspondent à une exploitation quasi complète du plan d'expériences suivant :

TABLEAU IV - 1

Variables	Nombre de Niveaux
N	8
τ	6
dp	4
a	5

Nous donnons à titre d'exemple, sur le tableau IV - 1 les valeurs expérimentales du nombre sans dimension $\bar{C}^*/\rho g D^3$ pour un plan de travail complet mais légèrement plus restreint que le précédent.

Cependant plutôt que de donner l'ensemble de cette information expérimentale uniquement sous la forme de graphiques ou de tableaux, nous avons préféré rechercher des relations d'interpolation. Il est classique en Génie Chimique d'écrire la relation IV - 14 issue de l'analyse dimensionnelle sous la forme particulière :

$$\frac{\bar{C}^*}{\rho D^4 N^2} = K \left(\frac{N^2 D}{g} \right)^u \cdot \tau^v \cdot \left(\frac{dp}{D} \right)^w \cdot \left(\frac{a}{D} \right)^x \cdot X^y \quad \text{IV - 15}$$

C'est sur ce type d'équation que nous avons fondé notre dépouillement.

IV - 5 - 3 Dépouillement graphique

Pour rechercher la valeur des paramètres intervenant dans l'équation IV - 14, nous avons adopté une méthode d'optimisation globale que nous décrirons au paragraphe IV - 5 - 4. Avant de l'entreprendre, il était cependant utile de déterminer un ordre de grandeur de ces paramètres afin de restreindre leur domaine de variation et de faciliter la

TABLEAU IV - I

τ	$\tau \cdot a/D$	0,2					0,15					0,1					a/D	N
0,09	0,0196	0,0256	0,0151	0,0172	0,0193	0,0280	0,0204	0,0233	0,0250	0,0340	0,0219	0,0207	1,25 0,625 0,278 0,125 0,0625 0,0278 0,0125					
	0,0242	0,0206	0,0178	0,0192	0,0216	0,0241	0,0167	0,0197	0,0216	0,0252	0,0178	0,0157						
	0,0212	0,0213	0,0172	0,0182	0,0216	0,0230	0,0167	0,0187	0,0205	0,0236	0,0167	0,0152						
	0,0271	0,0206	0,0167	0,0172	0,0216	0,0173	0,0141	0,0172	0,0187	0,0214	0,0146	0,0141						
	0,0294	0,0191	0,0157	0,0167	0,0205	0,0159	0,0125	0,0146	0,0165	0,0197	0,0141	0,0131						
	0,0280	0,0184	0,0141	0,0146	0,0182	0,0148	0,0120	0,0141	0,0142	0,0230	0,0141	0,0131						
0,252	0,0195	0,0141	0,0146	0,0182	0,0131	0,0115	0,0121	0,0131	0,0230	0,0136	0,0126							
0,18	0,0431	0,0427	0,0460	0,0415	0,0546	0,0505	0,0408	0,0466	0,0398	0,0550	0,0408	0,435						
	0,0456	0,0434	0,0450	0,0466	0,0450	0,0406	0,0345	0,0400	0,0353	0,0450	0,0340	0,0359						
	0,0454	0,0429	0,0425	0,0425	0,0455	0,0368	0,0324	0,0390	0,0380	0,0406	0,0380	0,0369						
	0,0400	0,0423	0,0397	0,0400	0,0415	0,0351	0,0298	0,0359	0,0324	0,0363	0,0298	0,0354						
	0,0385	0,0405	0,0376	0,0374	0,0347	0,0340	0,0282	0,0354	0,0341	0,0401	0,0287	0,0354						
	0,0390	0,0390	0,0361	0,0344	0,0387	0,0330	0,0272	0,0344	0,0341	0,0402	0,0282	0,0349						
0,351	0,0351	0,0356	0,0344	0,0387	0,0307	0,0261	0,0344	0,0330	0,0401	0,0282	0,0349							
0,27	0,0721	0,0703	0,0690	0,0688	0,0854	0,0714	0,0617	0,0679	0,0695	0,0648	0,0638	0,0584						
	0,0706	0,0656	0,0628	0,0699	0,0774	0,0654	0,0518	0,0618	0,0591	0,0549	0,0555	0,0525						
	0,0653	0,0619	0,0586	0,0628	0,0717	0,0643	0,0502	0,0607	0,0582	0,0549	0,0533	0,0502						
	0,0591	0,0560	0,0544	0,0592	0,0672	0,0560	0,0471	0,0597	0,0478	0,0588	0,0502	0,0549						
	0,0549	0,0549	0,0523	0,0544	0,0672	0,0567	0,0460	0,0597	0,0452	0,0610	0,0492	0,0540						
	0,0565	0,0541	0,0513	0,0562	0,0643	0,0637	0,0460	0,0582	0,0447	0,0659	0,0491	0,0540						
0,603	0,0556	0,0492	0,0547	0,0649	0,0577	0,0455	0,0577	0,0450	0,0626	0,0492	0,0604							
0,36	0,1000	0,0958	0,0915	0,0952	0,1070	0,1032	0,0785	0,0739	0,0820	0,0835	0,0826	0,0729						
	0,0912	0,0845	0,0842	0,0891	0,0957	0,0758	0,0722	0,0699	0,0751	0,0736	0,0764	0,0713						
	0,0844	0,0840	0,0758	0,0820	0,0888	0,0720	0,0701	0,0709	0,0740	0,0714	0,0732	0,0763						
	0,0767	0,0695	0,0718	0,0780	0,0922	0,0681	0,0634	0,0699	0,0717	0,0709	0,0696	0,0753						
	0,0729	0,0678	0,0685	0,0749	0,0854	0,0687	0,0633	0,0678	0,0740	0,0747	0,0675	0,0743						
	0,0744	0,0685	0,0744	0,0744	0,0843	0,0688	0,0628	0,0673	0,0746	0,0780	0,0669	0,0743						
0,752	0,0693	0,0649	0,0739	0,0831	0,0698	0,0688	0,0628	0,0699	0,0752	0,0813	0,0664	0,0728						
0,537	0,1294	0,1246	0,1246	0,1251	0,1378	0,1165	0,1104	0,1089	0,1264	0,1099	0,1172	0,0978						
	0,1179	0,1098	0,1188	0,1124	0,1218	0,1028	0,1088	0,1104	0,1162	0,1034	0,1151	0,1010						
	0,1169	0,0995	0,1120	0,1185	0,1162	0,0967	0,1057	0,1185	0,1162	0,1011	0,1099	0,1119						
	0,1107	0,0965	0,1057	0,1155	0,1173	0,0962	0,1020	0,1190	0,1196	0,1000	0,1129	0,1129						
	0,1062	0,0918	0,1036	0,1145	0,1213	0,0962	0,1005	0,1180	0,1139	0,1044	0,1030	0,1139						
	0,1046	0,0958	0,1020	0,1124	0,1247	0,0956	0,0994	0,1168	0,1105	0,1088	0,1031	0,1159						
0,1053	0,0965	0,0999	0,1089	0,1241	0,0956	0,0968	0,1155	0,1093	0,1143	0,1026	0,1144							
0,717	0,1382	0,1383	0,1371	0,1317	0,1383	0,1165	0,1329	0,1185	0,1383	0,1275	0,1444	0,1008						
	0,1312	0,1314	0,1298	0,1256	0,1314	0,1143	0,1298	0,1236	0,1314	0,1132	0,1382	0,1139						
	0,1289	0,1288	0,1282	0,1251	0,1288	0,1050	0,1251	0,1312	0,1288	0,1110	0,1298	0,1243						
	0,1152	0,1152	0,1235	0,1276	0,1152	0,1033	0,1214	0,1327	0,1152	0,1165	0,1224	0,1286						
	0,1260	0,1260	0,1193	0,1296	0,1260	0,1088	0,1182	0,1337	0,1260	0,1198	0,1203	0,1234						
	0,1267	0,1268	0,1183	0,1322	0,1268	0,1167	0,1172	0,1332	0,1268	0,1220	0,1203	0,1238						
0,1275	0,1275	0,1182	0,1377	0,1275	0,1109	0,1162	0,1332	0,1275	0,1242	0,1204	0,1231							
$\tau_{dp/D}$	15. 10 ⁻³	5. 10 ⁻³	10 ⁻³	4. 10 ⁻⁴	15. 10 ⁻³	5. 10 ⁻³	10 ⁻³	4. 10 ⁻⁴	15. 10 ⁻³	5. 10 ⁻³	10 ⁻³	4. 10 ⁻⁴	15. 10 ⁻³	5. 10 ⁻³	10 ⁻³	4. 10 ⁻⁴	N	

convergence de la méthode d'optimisation.

La méthode graphique classique, face à une équation de la forme IV - 15 dans laquelle on suppose que les interactions entre les divers facteurs sont négligeables, consiste à étudier successivement l'influence de chacun d'eux en coordonnées logarithmiques. On obtient alors des familles de droites parallèles dont la pente donne accès aux exposants.

IV-5-3-1 Influence du nombre de FROUDE

Les figures IV - 8, 9 et 10 donnent en coordonnées logarithmiques la variation de $\frac{\bar{C}^*}{\rho D^4 N^2}$ en fonction du nombre de FROUDE $Fr = \frac{N^2 D}{g}$ à taux de remplissage constant pour quelques valeurs de dp/D et la valeur $a/D = 0,2$.

En première approximation, les résultats sont convenablement représentés par des droites parallèles de pente $u = -1$; dans ces conditions, le couple $\bar{C}^*$ par unité de longueur du mélangeur est indépendant de la vitesse d'agitation.

On note cependant une légère rupture de pente pour des nombres de FROUDE compris entre 3,2 et $1,58 \cdot 10^{-4}$; au-delà de $Fr = 1,58 \cdot 10^{-4}$ on obtient $u = -0,98$ pour les billes de 1 et 3 mm : il en résulte que le couple $\bar{C}^*$ augmente légèrement quand la vitesse augmente. Le phénomène est plus complexe pour les sphères de 0,08 mm ; la pente varie alors de $-0,98$ à $-1,05$ à mesure que le taux de remplissage croît de 0,09 à 0,717 ; dans ce cas $\bar{C}^*$ diminue légèrement quand N augmente aux forts taux de remplissage.

IV-5-3-2 Influence du taux de remplissage

Etant donné que la vitesse joue un rôle très faible et que, de plus, son influence varie légèrement avec le diamètre des particules, nous avons adopté la valeur $u = -1$ pour la suite de notre dépouillement graphique.

Dans ces conditions, l'étude graphique de l'influence du taux de remplissage s'effectue dans la représentation $\frac{\bar{C}^*}{\rho D^4 N^2} \cdot \frac{N^2 D}{g}$ ou encore $\frac{\bar{C}^*}{\rho g D^3}$ vs τ .

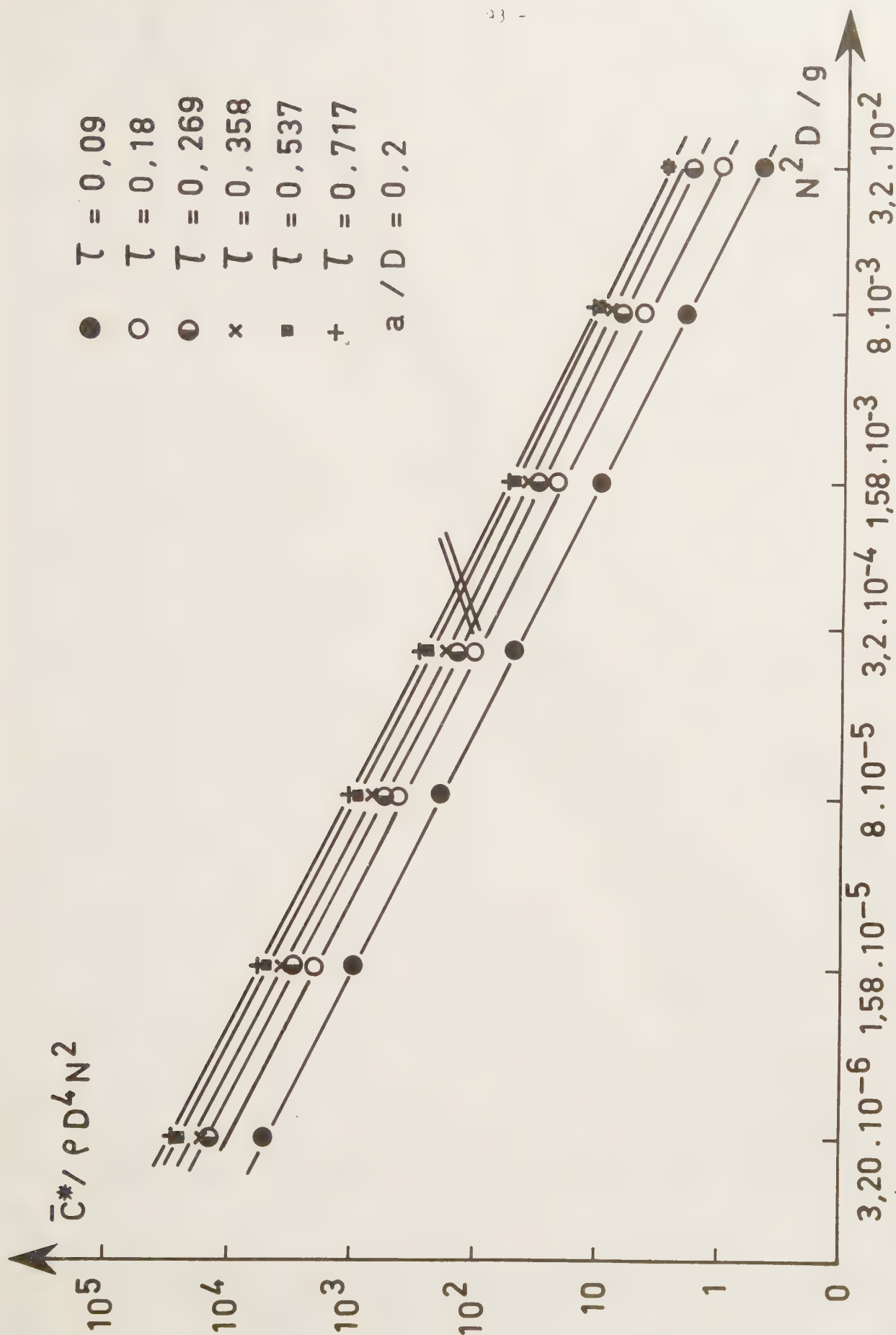


Fig.IV-8. Etude de l'influence de la vitesse d'agitation avec les billes de 1 mm.

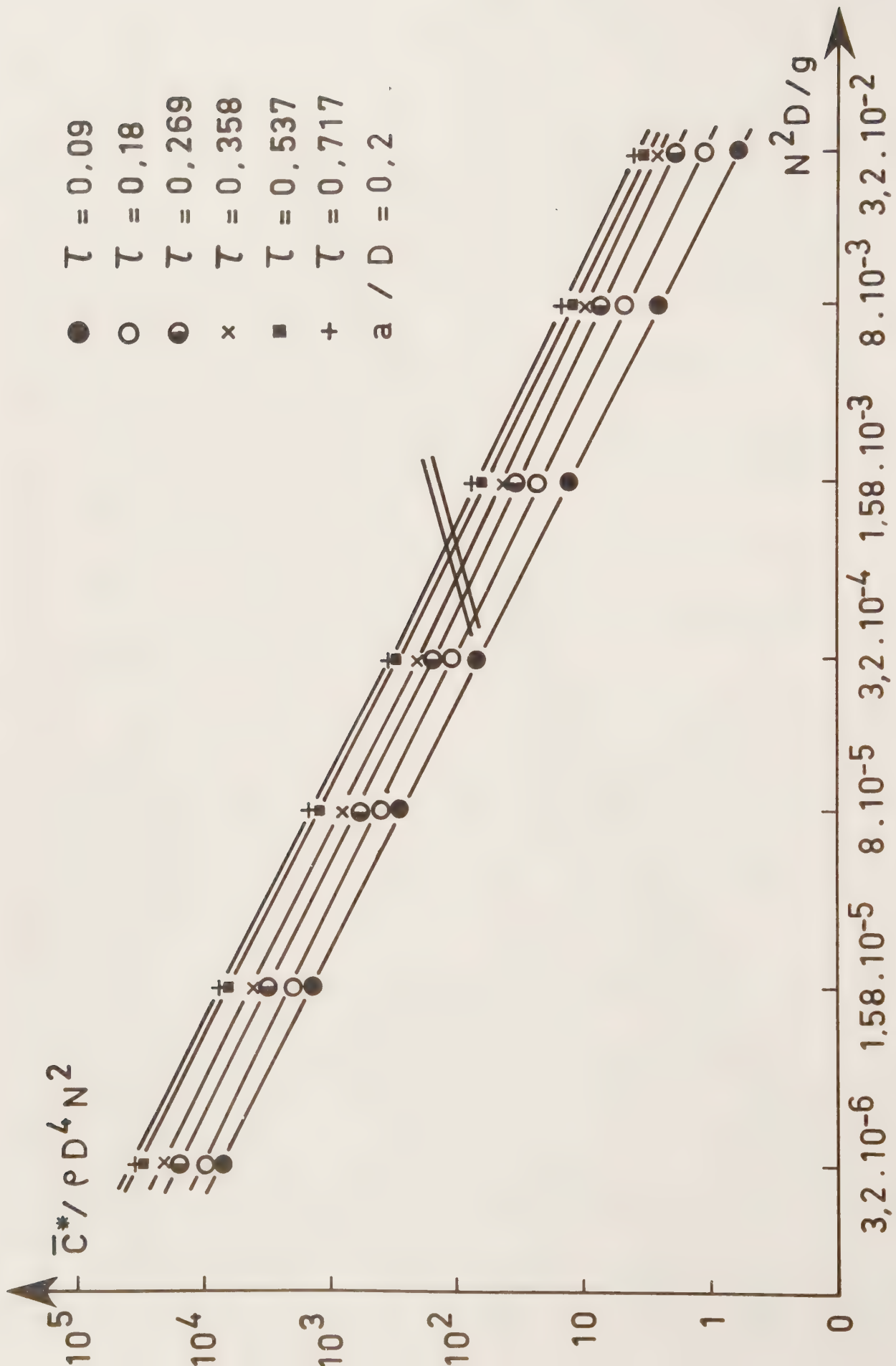


Fig. IV-9. Etude de l'influence de la vitesse d'agitation avec les billes de 3 mm

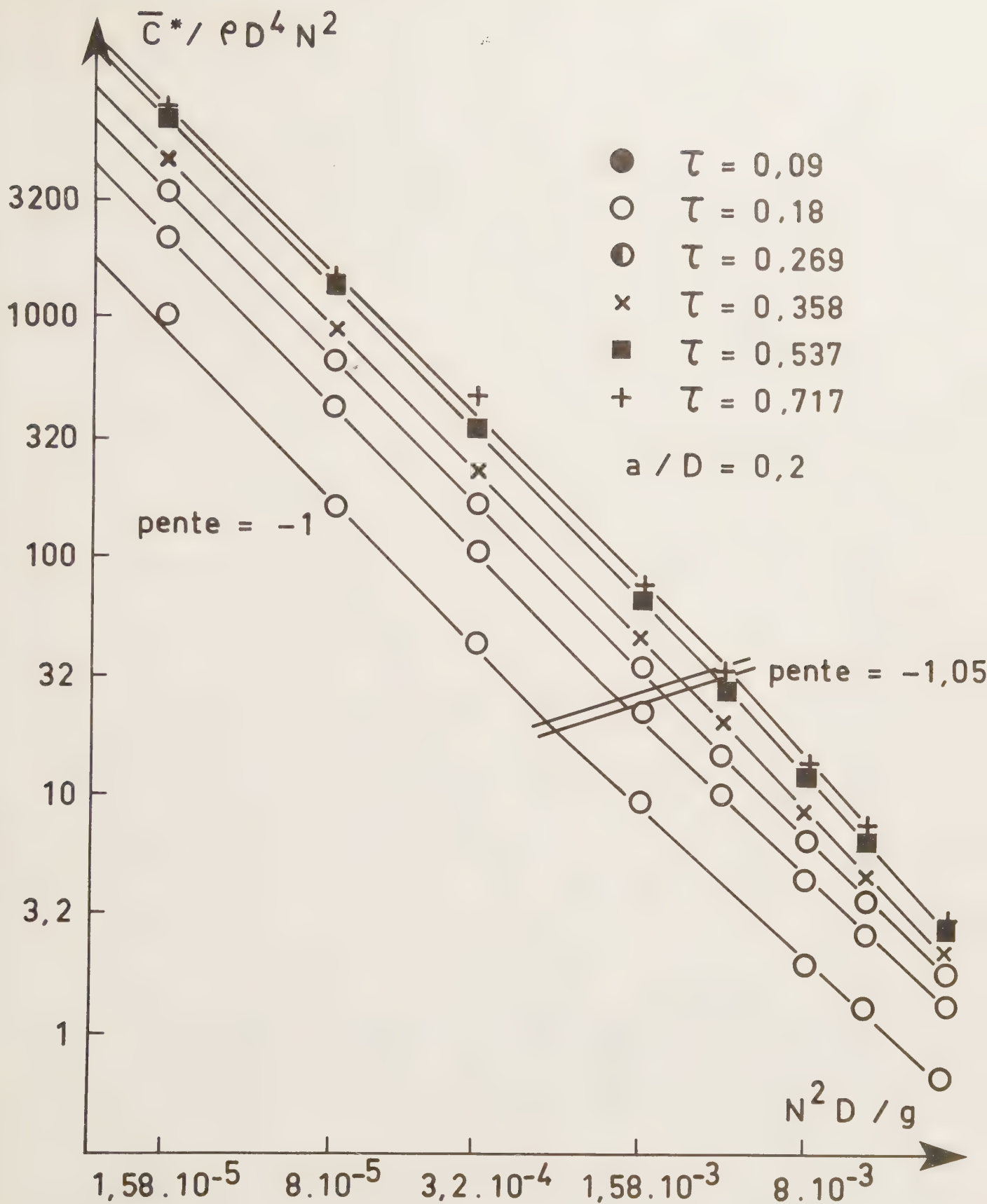


Fig. IV-10. Etude de l'influence de la vitesse d'agitation avec les billes de 0,08 mm.

Sur les figures IV - 11 à 14, les points représentent la valeur moyenne du couple pour les différents taux de remplissage étudiés et les segments verticaux la dispersion des mesures due à la vitesse d'agitation. On constate que pour toutes les granulométries de billes étudiées, le nombre de couple est en première approximation directement proportionnel à la charge du mélangeur ($v = 1$) dans tout le domaine expérimental : on retrouve alors le résultat de F. MUELLER pour les agitateurs à socs (M.5, chapitre III) ; par contre, si on ne tient pas compte des taux de remplissage les plus faibles qui ne présentent pas d'intérêt pratique, les résultats expérimentaux sont mieux représentés par une droite de pente 0,8.

IV-5-3-3 Influence de la taille des billes

Compte tenu de ce qui précède, il est logique de porter :

$$\frac{\bar{C}^*}{\rho D^4 N^2} \cdot Fr \cdot \tau^{-0,8} = \frac{\bar{C}^*}{\rho g D^3} \cdot \tau^{-0,8}$$

en fonction de dp/D à inclinaison de pale constante pour les valeurs de τ supérieures à 0,18. La figure IV - 15 montre que les valeurs expérimentales se répartissent autour d'une droite unique horizontale. L'influence de la taille des billes est donc négligeable ; il en est de même de celle de toute propriété rhéologique X du milieu granulaire puisque dans le cas particulier de nos mesures, elles ne dépend évidemment que de la taille des particules.

IV-5-3-4 Influence du maître-couple des pales

Le maître-couple des pales a été modifié de deux manières différentes (cf. § IV - 3 - 2) ; les valeurs de a/D sont les suivantes : 0,2, 0,15, 0,1 obtenues avec les pales de 41 ± 1 mm inclinées de 75° , 45° et 30° sur la tangente au mélangeur ou avec les pales de 30 et 20 mm inclinées à 75° .

Les figures IV - 11 à IV - 14 sur lesquelles nous avons porté les mesures relatives aux différents maîtres-couples pour chaque granulométrie de billes étudiée, montrent que l'influence de ce paramètre est négligeable.

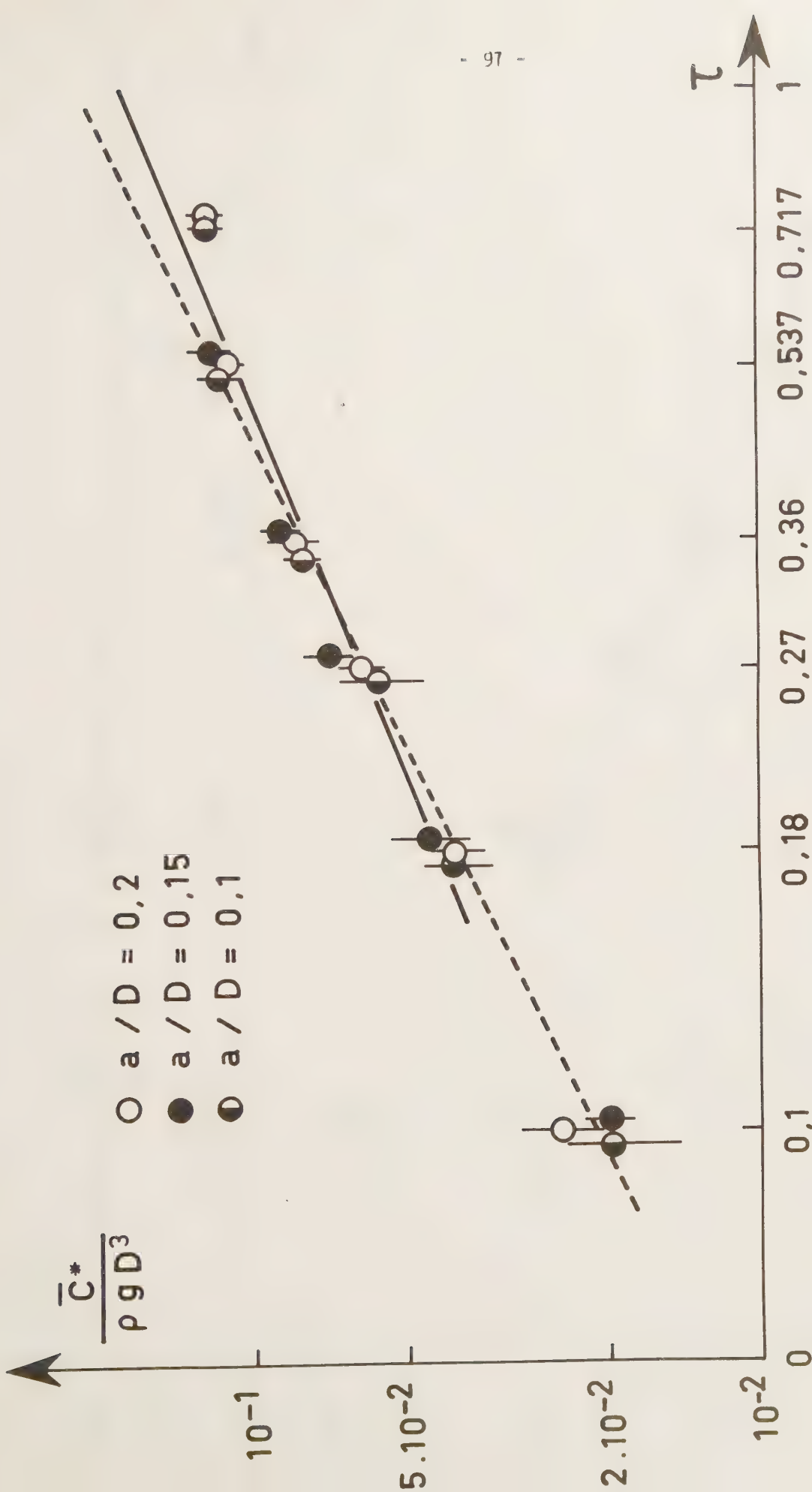


Fig. IV-11 . Influence du taux de remplissage pour des billes de verre de 3mm

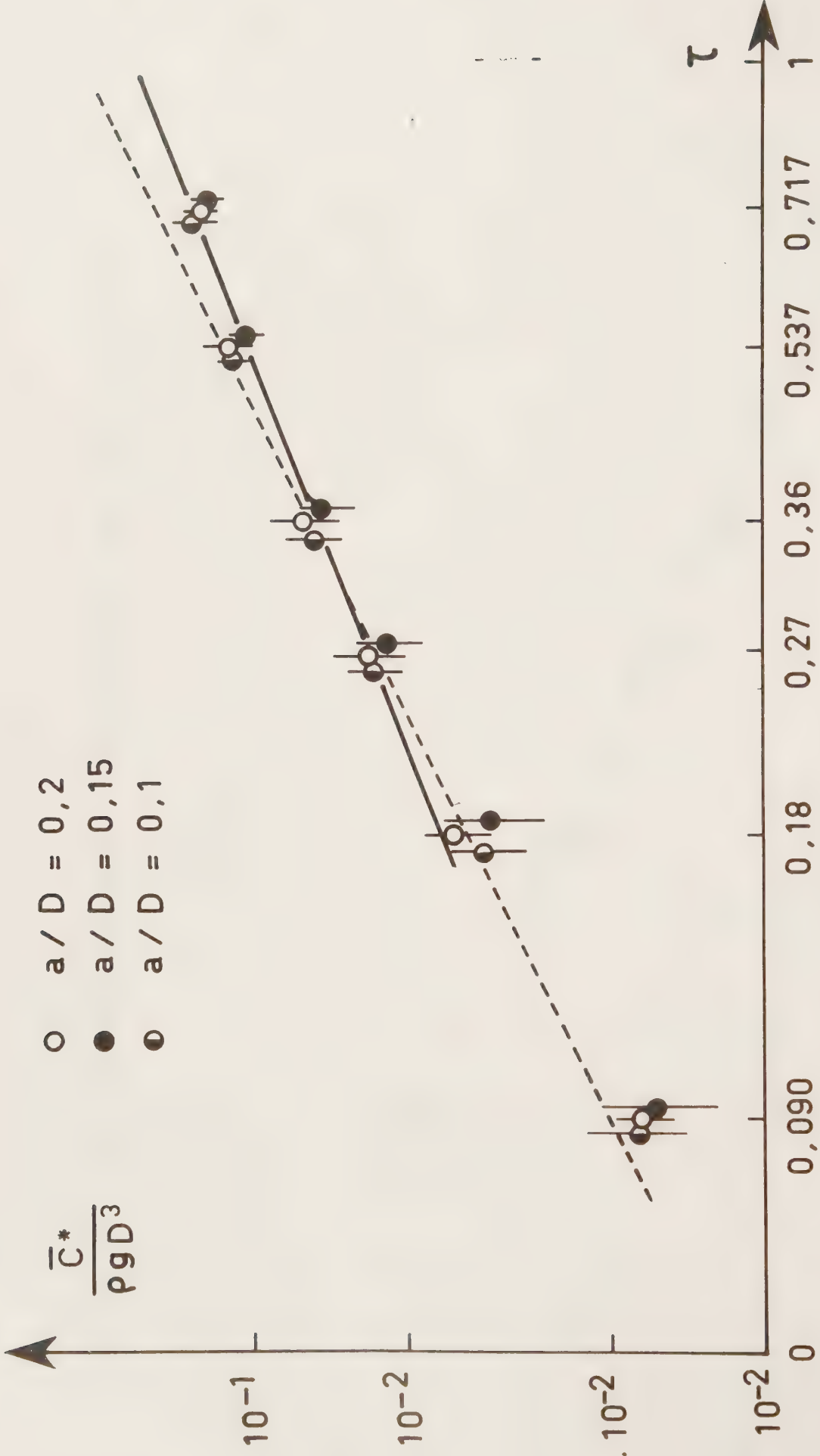


Fig. IV.12. Influence du taux de remplissage pour des billes de verre de 0,2 mm.

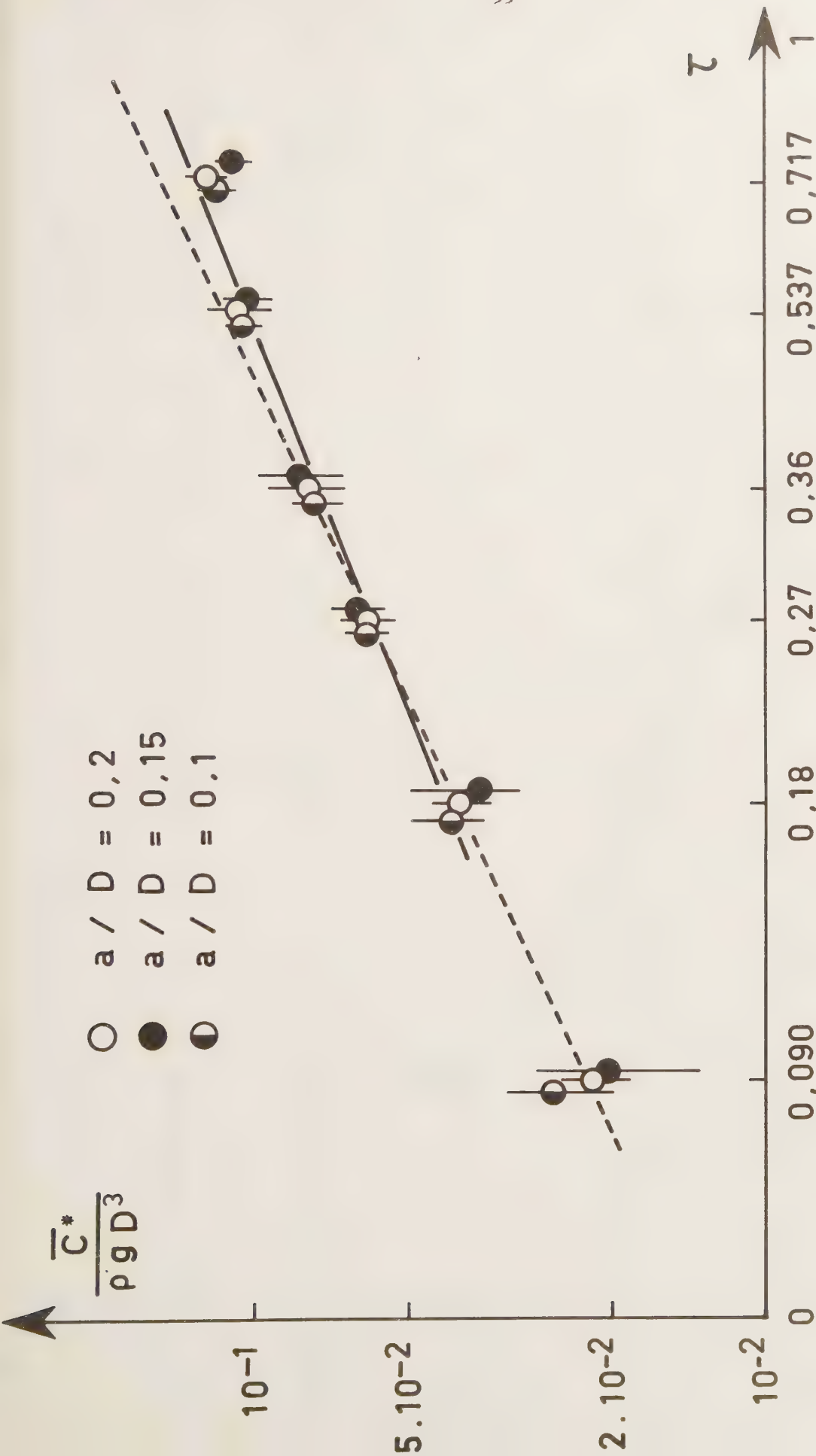


Fig. IV-13. Influence du taux de remplissage pour des billes de verre de 1 mm.

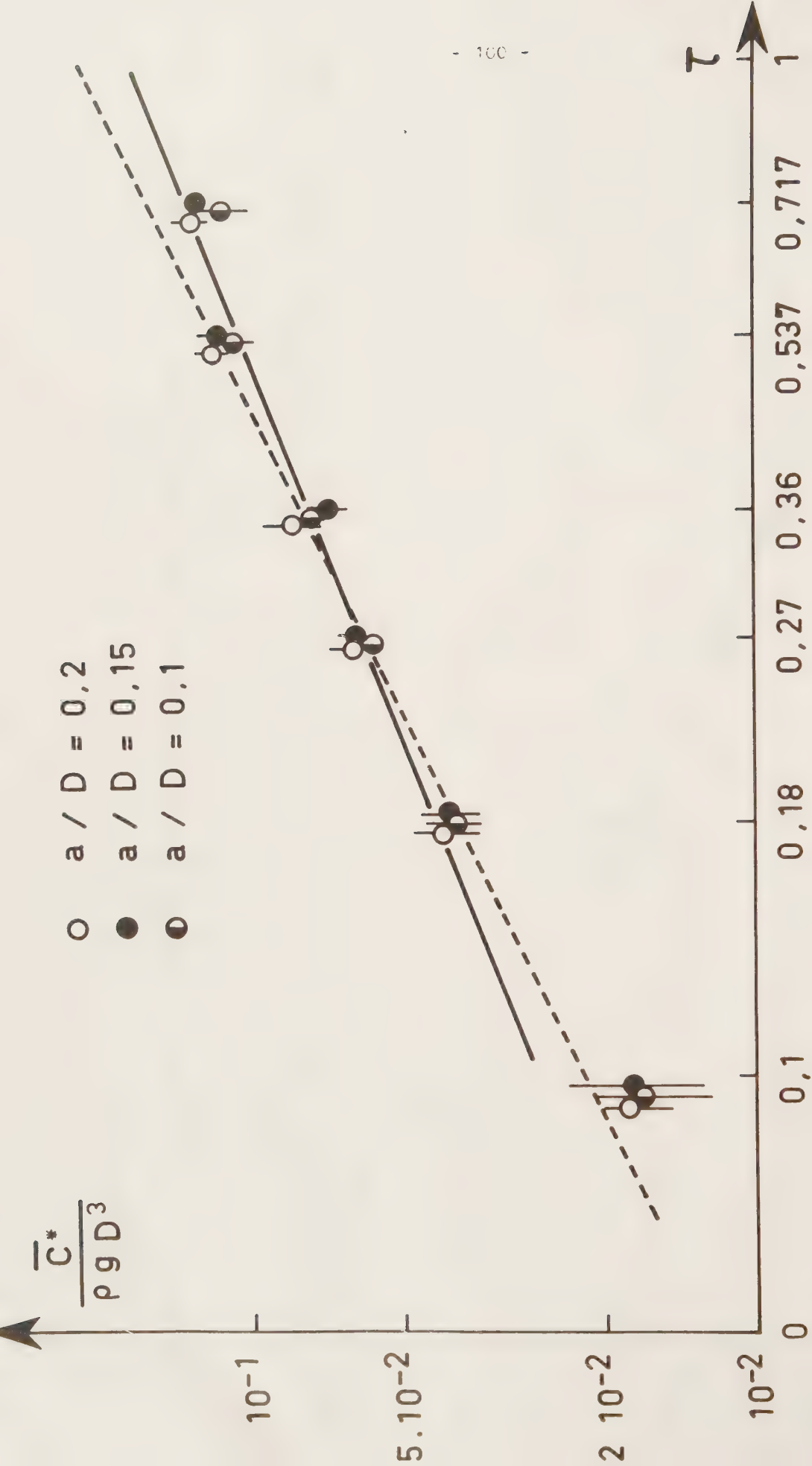


Fig. IV.14 . Influence du taux de remplissage pour des billes de verre de 0,08 mm

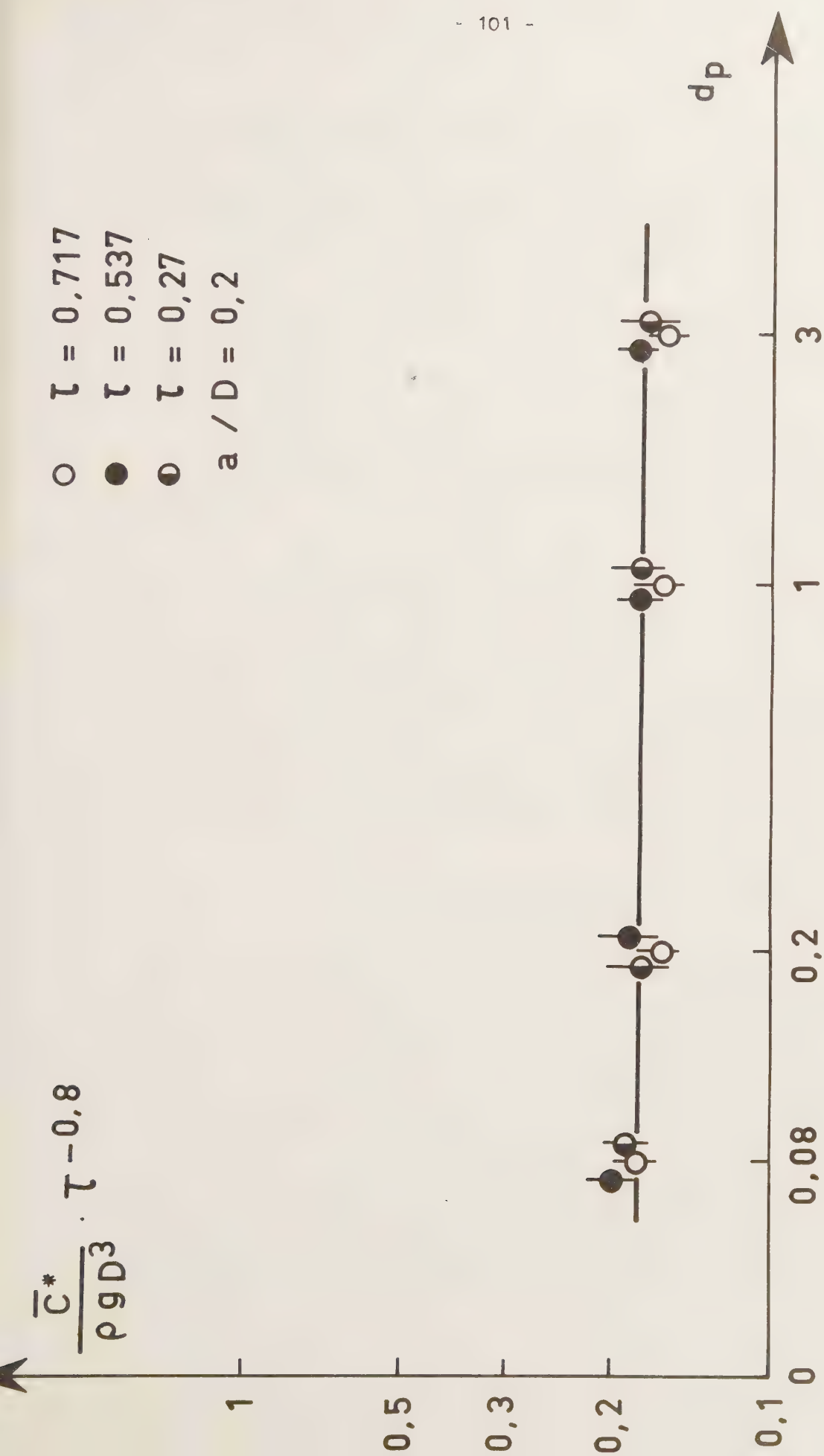


Fig. IV-15 . Influence du diamètre des particules pour $\tau \geq 0,27$.

IV-5-3-5 Conclusion; valeur approchée des coefficients

Si nous ne tenons pas compte des mesures relatives aux remplissages très faibles, la figure IV - 15 fournit comme valeur approximative de la constante K de l'équation IV - 15 : $K \approx 0,18$.

Les exposants du nombre de FROUDE et du taux de remplissage sont voisins respectivement de - 1 et + 0,8.

Les exposants de $\frac{dp}{D}$ et $\frac{a}{D}$ sont faibles.

IV- 5 - 4 Optimalisation de la fonction empirique

Tenant compte de ce qui précède, on peut écrire la relation IV - 15 sous la forme :

$$\frac{\bar{C}}{\rho D^4 N^2} = (0,18 \pm \varepsilon_1) \cdot \left(\frac{N^2 D}{g}\right)^{-1 \pm \varepsilon_2} \cdot 0,8 \pm \varepsilon_3 \left(\frac{dp}{D}\right)^{\varepsilon_4} \cdot \left(\frac{a}{D}\right)^{\pm \varepsilon_5} \cdot X^{\pm \varepsilon_6} \quad \text{IV - 16}$$

Dans cette équation les ε_i représentent les écarts entre les coefficients obtenus par la méthode graphique et les coefficients optimaux.

Nous nous proposons de traiter l'ensemble des résultats expérimentaux afin de définir avec le maximum de précision les valeurs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5$ et ε_6 .

IV-5-4-1 Principe de l'optimalisation

Le principe du lissage consiste à faire varier les exposants de l'équation IV - 16 de manière à minimiser les écarts entre les points calculés et les points expérimentaux. Ces écarts permettent de définir une fonction d'erreur que nous avons choisie égale à la somme des carrés des écarts relatifs pour éviter d'attribuer un poids mathématique trop grand aux mesures correspondant aux vitesses faibles.

La méthode utilisée dans notre calcul est due à ROSENBROCK (R 10) ; elle est exposée en français dans l'ouvrage de WILDE (W 9). La méthode de ROSENBROCK n'est valable que pour les fonctions unimodales, c'est-à-dire ne représentant qu'un seul extremum ; on vérifiera

donc au cours des calculs que les différents exposants convergent vers une valeur constante quel que soit le point de départ de l'optimisation.

IV-5-4- 2 Méthode de dépouillement

L'optimisation de la relation IV - 16 a été effectuée sur un ordinateur I.B.M. 1130. Les grandeurs représentant les paramètres principaux ont été indicées dans le but de repérer les domaines auxquels correspondent des écarts trop importants avec la relation obtenue, en particulier les changements de régime. Le programme dont l'organigramme est schématisé sur la figure IV - 16 a été décrit en FORTRAN.

Dans l'espoir de tenir compte des propriétés rhéologiques du milieu granulaire, on a cherché à examiner l'influence du coefficient de frottement interne ($X = \text{tg } \mu$). Sa variation étant très faible pour les charges étudiées (chapitre II), on observe, selon les valeurs initiales du vecteur des variables (K, u, v, w, x, y) que l'exposant y du groupe X prend des valeurs quelconques telles que $KX^y = K\text{tg}\mu^y$ reste constant : il n'est pas possible de déterminer l'influence de $\text{tg } \mu$. Les valeurs optimales des exposants de $\frac{dp}{D}$ et $\frac{a}{D}$ sont toujours très faibles et de l'ordre de 10^{-4} .

IV-5-4-3 Relation couvrant l'ensemble du domaine expérimental.

Rejetant, dans un premier temps, les indications du dépouillement graphique, nous avons recherché une relation unique représentant au mieux l'ensemble des résultats ; elle s'écrit :

$$\frac{\bar{C}^*}{\rho_D^4 N^2} = 0,22 \text{ Fr}^{-0,98} \cdot \tau^{0,96} \quad \text{IV - 17}$$

Sa précision relative $\frac{\Delta \bar{C}^*}{\bar{C}^*}$ est égale à 14 %.

On retrouve bien la relation de proportionnalité obtenue par la méthode graphique lorsqu'on tient compte des faibles taux de remplissage (fig. IV - 11 à 14).

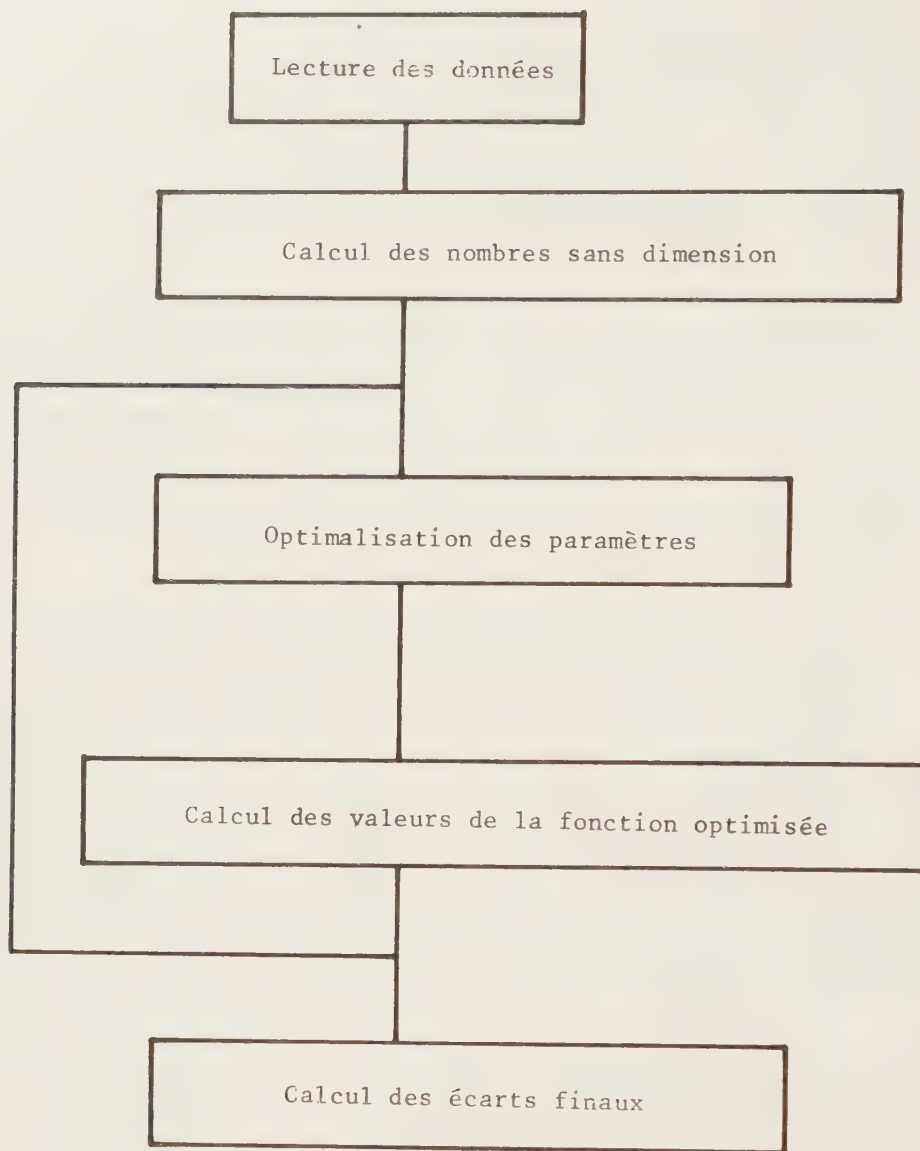


Fig. IV-16 . ORGANIGRAMME SCHEMATIQUE DU LISSAGE SUR CALCULATEUR

IV-5-4-4 Relations valables dans les domaines restreints

Tenant compte des indications du dépouillement graphique, on a recherché des relations d'interpolation dans des domaines plus restreints.

1) En supprimant comme lors du dépouillement graphique les mesures relatives aux taux de remplissage inférieurs à 0,27, on obtient dans le domaine :

$$0,27 \leq \tau \leq 0,72$$

$$0,08 \leq dp \leq 3 \text{ mm}$$

les deux relations suivantes pour lesquelles $\frac{\Delta \bar{C}^*}{\bar{C}^*} = 10 \%$

$$a) 1,58.10^{-5} \leq Fr \leq 1,58.10^{-3}$$

$$\frac{\bar{C}^*}{\rho D^4 N^2} = 0,175 Fr^{-0,993} \tau^{0,804} \quad \text{IV - 18}$$

$$b) 1,58.10^{-3} \leq Fr \leq 3,2.10^{-2}$$

$$\frac{\bar{C}^*}{\rho D^4 N^2} = 0,18 Fr^{-0,98} \tau^{0,75} \quad \text{IV - 19}$$

2) Si on supprime en plus les résultats expérimentaux concernant les billes de 0,08 mm :

a) l'équation IV - 18 devient :

$$\frac{\bar{C}^*}{\rho D^4 N^2} = 0,18 Fr^{-0,99} \tau^{0,8} \quad \text{IV - 20}$$

b) et l'équation IV - 19 :

$$\frac{\bar{C}^*}{\rho D^4 N^2} = 0,21 Fr^{-0,957} \tau^{0,76} \quad \text{IV - 21}$$

Les relations IV - 20 et IV - 21 représentent alors les mesures à mieux 8 %.

3) Le comportement un peu particulier des billes de 0,08 mm est représenté par les équations :

$$a) \quad 0,27 \leq \tau \leq 0,72$$

$$1,58.10^{-5} \leq Fr \leq 1.58.10^{-3}$$

$$\frac{\bar{C}^*}{\rho D^4 N^2} = 0,185 \quad Fr^{-0,99} \quad \tau^{0,8} \quad \text{IV - 22}$$

$$b) \quad 0,27 \leq \tau \leq 0,72$$

$$1,58.10^{-3} \leq Fr \leq 3,20.10^{-2}$$

$$\frac{\bar{C}^*}{\rho D^4 N^2} = 0,17 \quad Fr^{-1,04} \quad \tau^{0,70} \quad \text{IV - 23}$$

N.B. : Le changement de régime, mis plus clairement en évidence avec les billes de 0,08 mm, au voisinage du nombre de FROUDE $1,58.10^{-3}$ semble correspondre au passage d'un mouvement de cascade à un mouvement de cataracte : certaines particules ont alors des trajectoires libres.

IV - 5 - 5 Conclusion

L'optimisation de l'équation IV - 16 confirme les résultats du dépouillement graphique ; les équations obtenues montrent que l'inclinaison et la largeur des pales et dans une plus faible mesure le diamètre des particules n'interviennent pas sur le couple moyen.

IV - 6 MESURE DU COUPLE INSTANTANE

Lors de l'agitation d'un lit granulaire par un agitateur à pales, deux phénomènes entraînent des fluctuations du couple instantané :

- l'inertie du lit lors de la mise en route du système d'entraînement ;
- le chargement et le déchargement successifs des pales.

Il est évident que l'appareillage doit pouvoir fournir sans dommage le couple maximal sollicitant l'agitateur. On se propose de déterminer, dans ce paragraphe, le facteur qui doit être pris en considération pour le calcul du coefficient correctif des équations obtenues précédemment c'est-à-dire le coefficient de sécurité pour des conditions particulières de travail.

Nous examinerons tout d'abord l'accroissement du couple au démarrage car il semble a priori le plus important.

IV - 6 - 1 Principe des mesures

IV-6-1-1 Compléments sur l'appareillage

Le signal fourni par le capteur puis amplifié par le pont d'extensométrie est, dans cette étude directement envoyé sur un enregistreur rapide.

L'enregistreur SEDEME type M 1330 que nous avons employé permet des mesures précises du couple instantané en raison de l'utilisation :

- de galvanomètres crayons de fréquence élevée et d'inertie négligeable qui peuvent suivre des variations brusques du signal appliqué;
- d'une inscription optique sur papier photosensible qui évite tout frottement lors de l'enregistrement;
- de vitesses élevées de déroulement du papier (jusqu'à 2,5 m/s) qui permettent de séparer des phénomènes très rapprochés.

Cet enregistreur possède une base de temps réglée sur la fréquence du réseau électrique.

IV-6-1-2 Méthode de dépouillement

La figure IV - 17 montre que la forme des enregistrements du couple varie avec la vitesse d'agitation. Aux faibles vitesses, si l'on constate une légère bosse sur le front de montée lors de l'attaque des pales, on ne peut cependant pas parler d'accroissement du couple au démarrage puisque le couple reste inférieur à la valeur maximale obtenue en régime permanent.

Aux plus fortes vitesses par contre, on observe un pic net d'ordonnée maximale C_D : on définira alors l'accroissement du couple au démarrage par le rapport $C_D/\bar{C}$, $\bar{C}$ désignant la valeur moyenne du couple en régime permanent.

Le nombre $C_D/\bar{C}$ représente donc un coefficient de sécurité dont il convient de tenir compte dans le calcul de l'agitateur et de son dispositif d'entraînement lorsque le moteur prend quasi instantanément sa vitesse de régime : notons que c'est là un cas peu fréquent dans les applications industrielles.

IV - 6 - 2 Résultats concernant le couple au démarrage

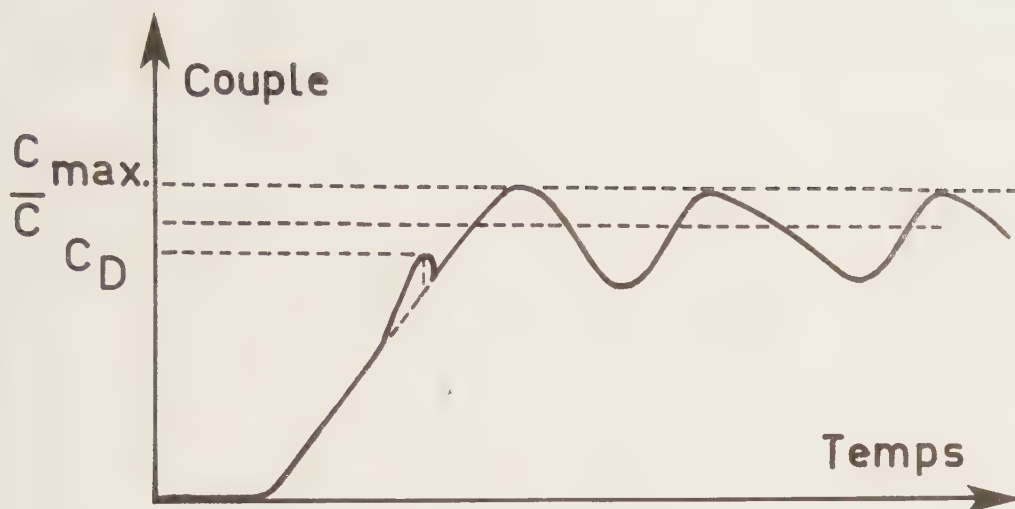
Les résultats obtenus sont dispersés car ils dépendent de la position de l'agitateur par rapport au lit granulaire, facteur que nous n'avons pas cherché à contrôler. Aussi nous contenterons-nous d'un dépouillement succinct.

La figure IV - 18 correspondant à la vitesse $N = 0,278$ t/s montre que le diamètre des particules, le taux de remplissage et l'inclinaison des pales n'ont pas d'influence significative sur la valeur du rapport $C_D/\bar{C}$.

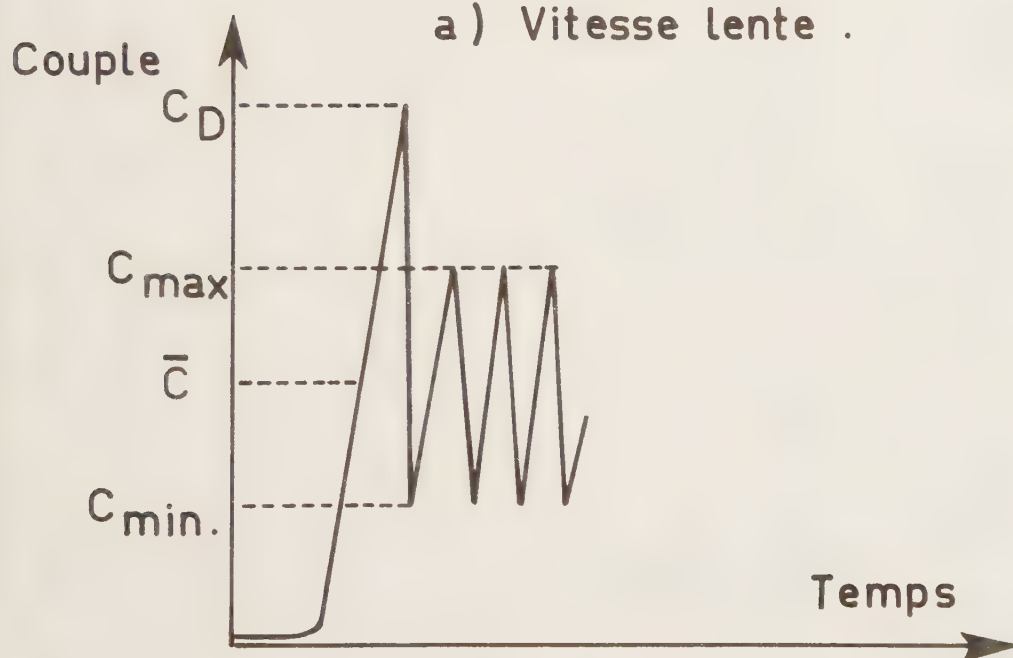
L'influence de la vitesse N , c'est-à-dire du nombre de FROUDE est traduite sur la figure IV - 19. On note une augmentation sensible ; en première approximation, elle peut être représentée par la relation :

$$\frac{C_D}{\bar{C}} = 4. Fr^{0,19} \quad \text{IV - 24}$$

qui rend compte des résultats expérimentaux à ± 20 %.



a) Vitesse lente .



b) Vitesse rapide .

Fig. IV-17. Forme des enregistrements du couple instantané.

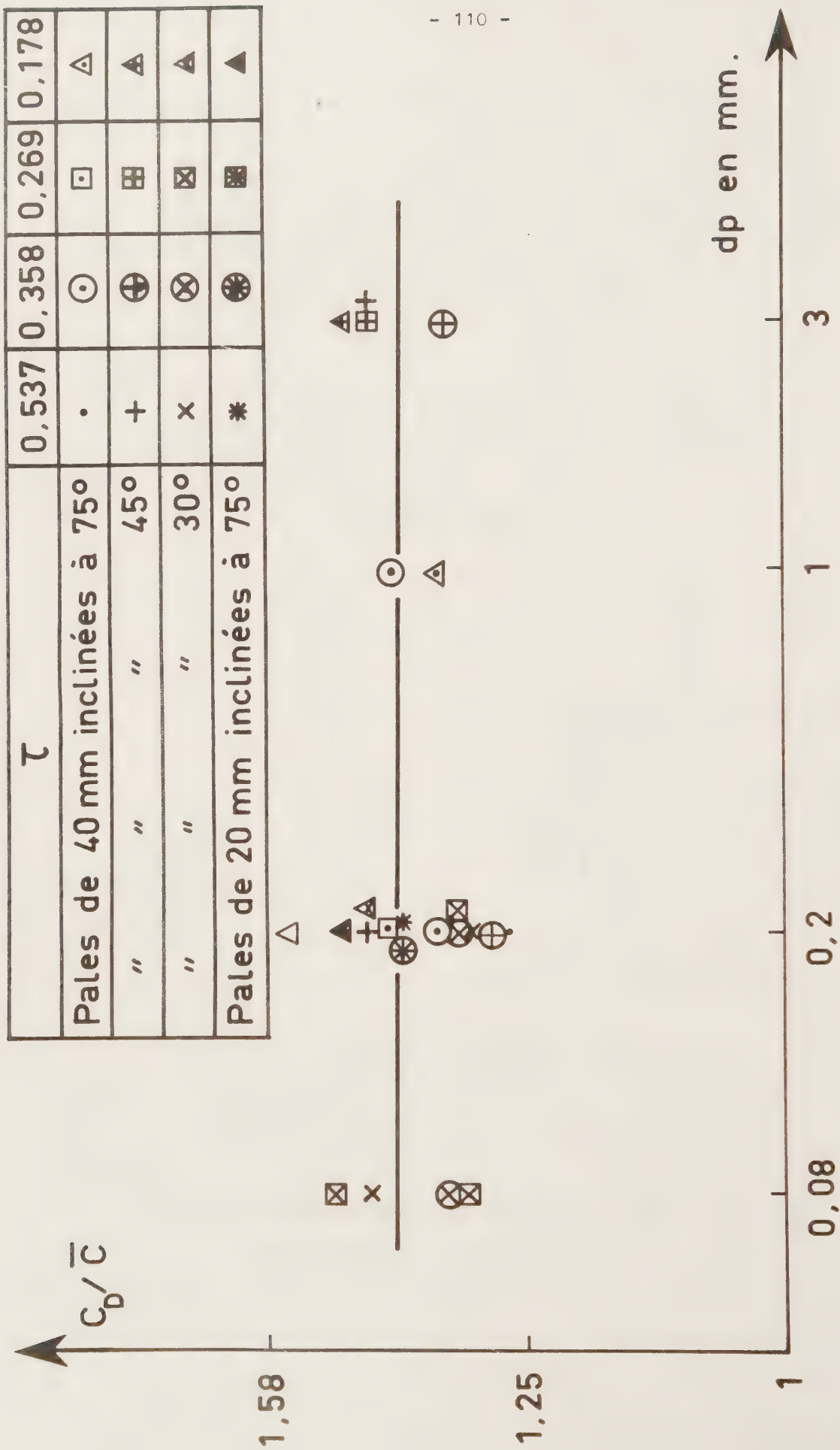


Fig. IV-18. Influences sur l'accroissement du couple au démarrage de la dimension des billes, du taux de remplissage et du maître couple à une vitesse d'agitation de 0,278 t/s.

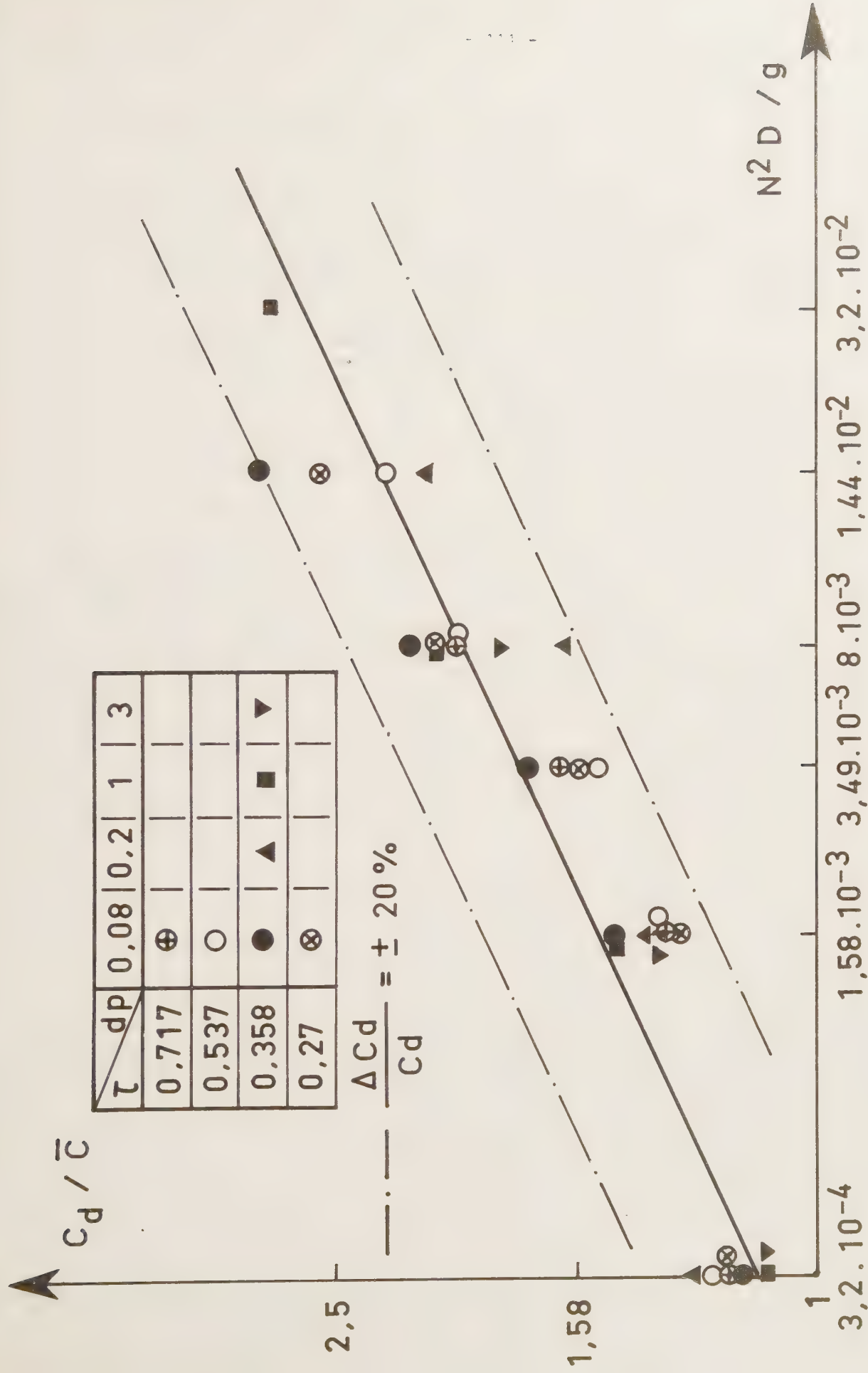


Fig. IV-19. Accroissement du couple au démarrage en fonction de la vitesse d'agitation.

IV - 6 - 3 Etude du couple maximal en régime d'agitation

On introduit le nombre $\frac{C_{\max}}{\bar{C}}$ rapport entre le couple maximal et le couple moyen en régime d'agitation (fig. IV - 17). C'est également un coefficient de sécurité dont il faut tenir compte dans le calcul de l'agitateur et de son système d'entraînement.

La figure IV - 20 où l'on a porté $C_{\max}/\bar{C}$ en fonction du nombre de FROUDE à taux de remplissage constant pour des valeurs prises au hasard de dp/D et a/D montre :

- a) que dp/D et a/D n'ont pas d'influence significative
- b) que $C_{\max}/\bar{C}$ diminue avec le taux de remplissage
- c) que $C_{\max}/\bar{C}$ croît légèrement avec le nombre de FROUDE au-delà d'une valeur critique Fr_R qui dépend du taux de remplissage.

La détermination de la pente des segments de droite représentant au mieux les résultats expérimentaux conduit aux expressions suivantes :

$$a) \quad Fr < Fr_R \quad (\tau)$$

$$\frac{C_{\max}}{\bar{C}} = K(\tau) \quad \text{IV - 25}$$

$$b) \quad Fr > Fr_R \quad (\tau)$$

$$\frac{C_{\max}}{\bar{C}} = K(\tau) \cdot Fr^{0,035} \quad \text{IV - 26}$$

La figure IV - 21 donne la variation du nombre de FROUDE critique en fonction du taux de remplissage ; en première approximation, on a :

$$Fr_R \cdot \tau^2 = 4 \cdot 10^{-5} \quad \text{IV - 27}$$

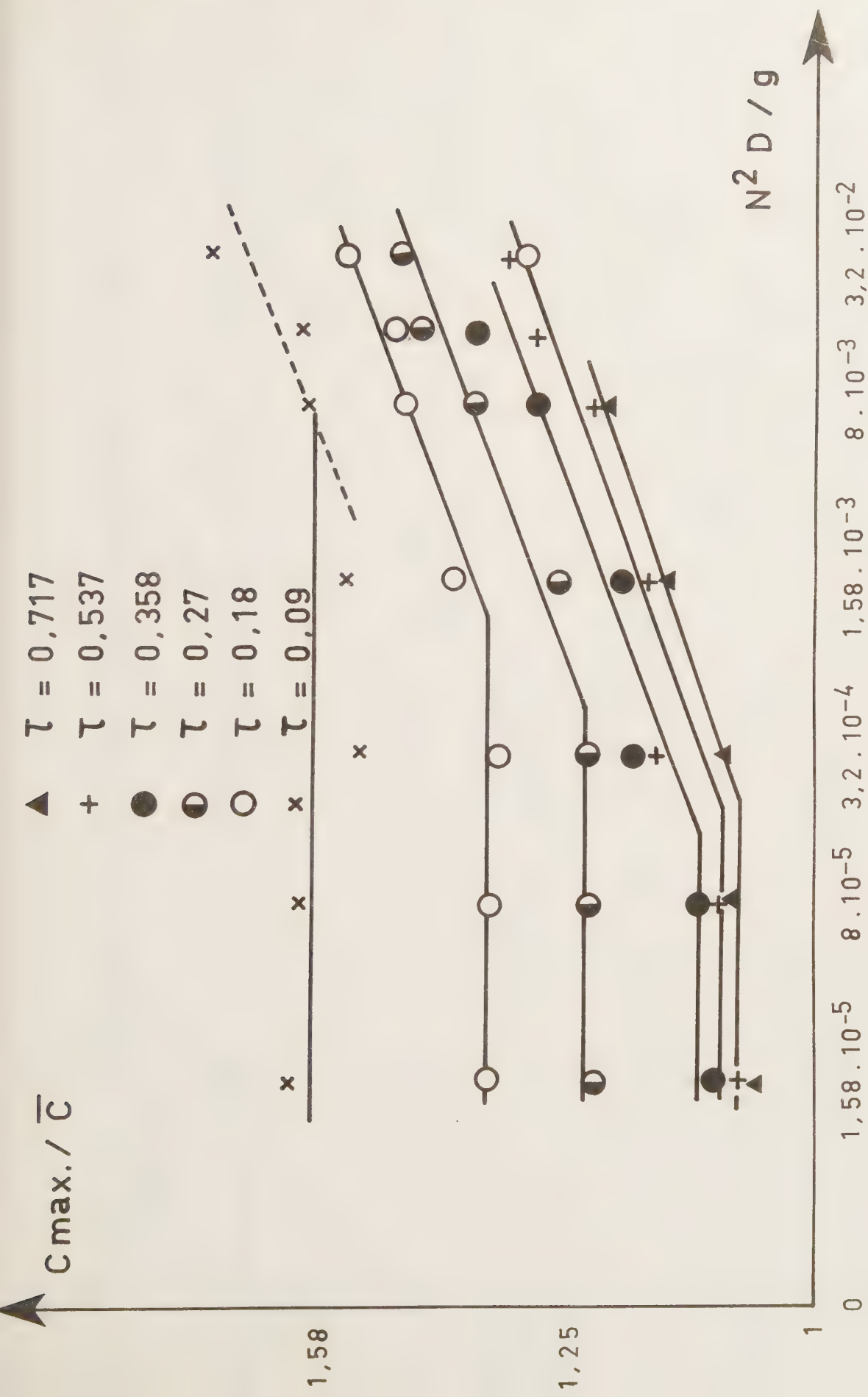


Fig . IV-20 . Influence de la vitesse d'agitation sur le couple maximum en régime permanent d'agitation .

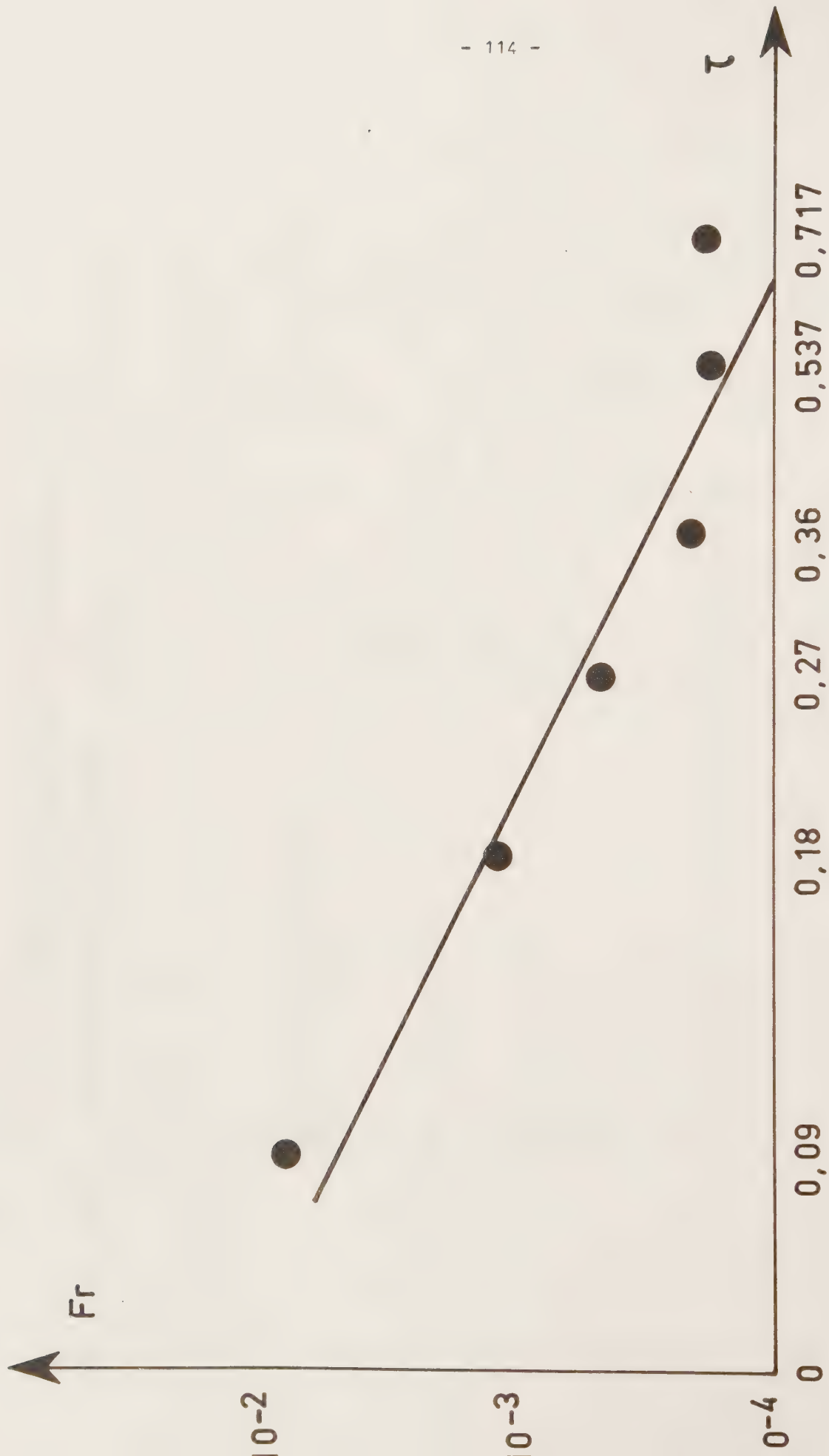


Fig. IV-21. Relation entre Fr et τ correspondant à la rupture de pente.

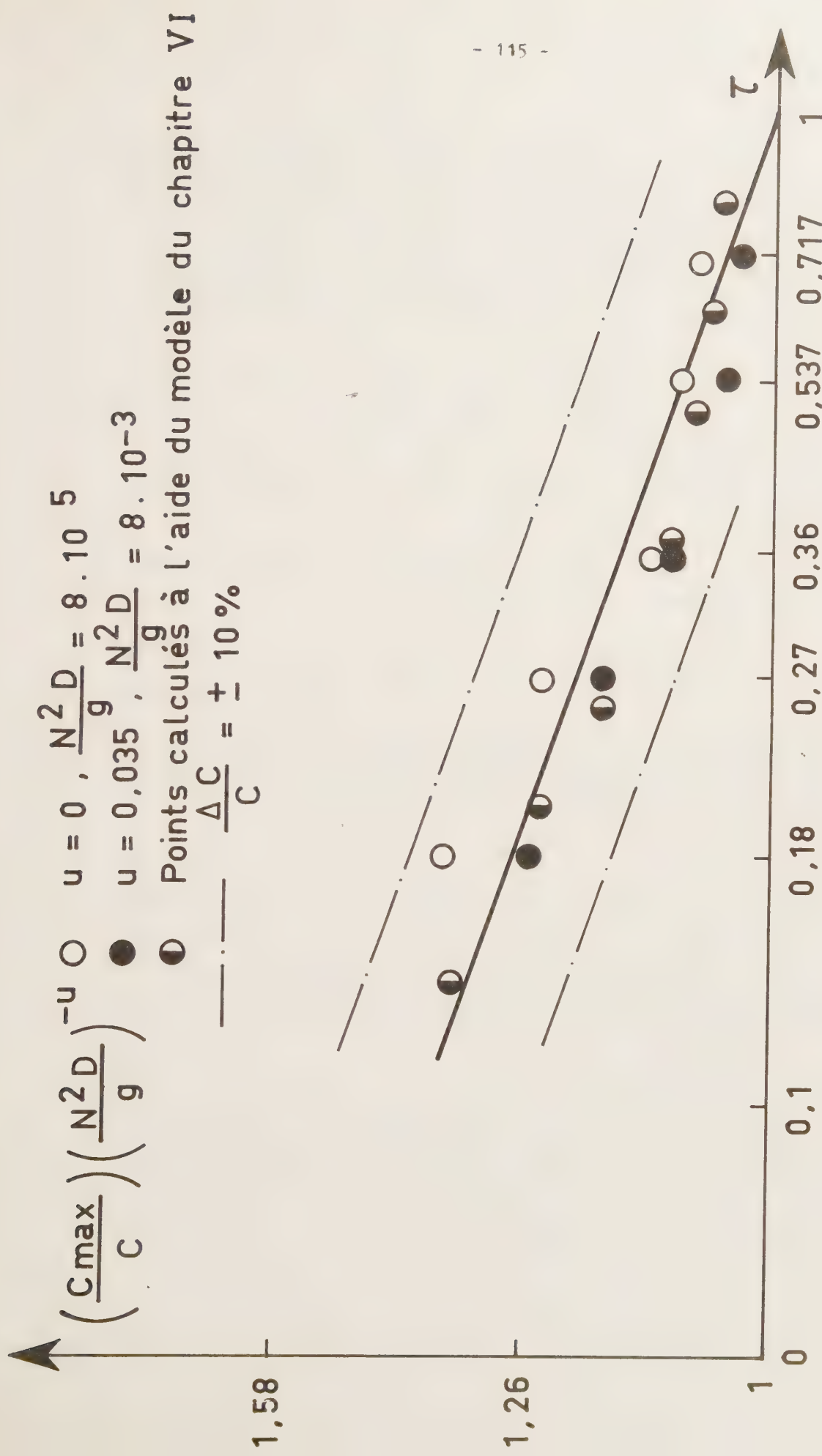


Fig. IV-22 . Influence du taux de remplissage sur les fluctuations du couple instantané .

Aux forts taux de remplissage, le changement de régime apparaît cependant pour des vitesses plus élevées que celles données par l'équation IV - 27. On retrouve là un comportement analogue à celui des matériaux granulaires dans les cylindres tournants ; en effet, on a vu au chapitre III que la vitesse de précentrifugation dans les cylindres lisses augmente très sensiblement quand le taux de remplissage décroît.

L'étude de l'influence du taux de remplissage a été effectuée en portant $\frac{C_{\max}}{\bar{C}} \cdot \left(\frac{N^2 D}{g} \right)^{-u}$ ($u_1 = 0$ et $u_2 = 0,035$) vs τ pour des valeurs prises au hasard de $\frac{dp}{D}$ et a/D . On constate sur la figure IV - 22 que les résultats se situent au voisinage d'une droite de pente - 0,14.

On propose donc pour représenter la variation du couple maximal, l'équation :

$$\frac{C_{\max}}{\bar{C}} = Fr^u \cdot \tau^{-0,14} \quad \text{IV - 28}$$

dans laquelle l'exposant de FROUDE est défini par la relation IV - 25 et IV - 26 de part et d'autre de la valeur critique Fr_R (éq. IV - 27) ; sa précision est de l'ordre de 10 %.

Remarque : Nous verrons au chapitre IV (§ VI - 3 - 3) que le modèle proposé pour interpréter les résultats permet de calculer le rapport du couple maximal au couple moyen.

Les valeurs théoriques sont comparées aux résultats expérimentaux sur la figure IV - 22 ; l'accord s'avère satisfaisant.

IV - 7 CONCLUSION

La technique utilisée pour la mesure du couple nécessaire à l'agitation du lit granulaire s'est révélée d'une grande souplesse d'emploi tout en restant sensible et fiable. On a pu accéder ainsi au couple maximal en régime d'agitation, au couple au démarrage et au couple moyen.

Les résultats expérimentaux relatifs à la mesure du couple moyen montrent qu'en première approximation, la vitesse d'agitation, le diamètre des particules et le maître-couple des pales ne jouent pas de rôle significatif dans le domaine étudié. L'influence du taux de remplissage est traduite, selon l'étendue du domaine de variation par les relations suivantes :

$$a) \quad 0,09 < \tau < 0,72$$

$$\frac{\bar{C}}{\rho g D^3} = 0,22 \tau$$

$$b) \quad 0,27 < \tau < 0,72$$

$$\frac{\bar{C}}{\rho g D^3} = 0,18 \tau^{0,8}$$

Le couple instantané n'étant pas constant, nous avons introduit deux coefficients de sécurité :

1) le premier est défini comme le rapport entre le couple au démarrage et le couple moyen ; il croît rapidement dès que le nombre de FROUDE atteint la valeur $3,2 \cdot 10^{-4}$.

2) Le second est le rapport entre le couple maximal en régime d'agitation et le couple moyen. Si on note également dans ce cas une légère influence de la vitesse, ce rapport varie surtout avec le taux de remplissage ; l'étude de cette variation a permis en particulier d'apporter une confirmation intéressante du modèle développé au chapitre VI.

Toutefois, il convient de vérifier lors des applications industrielles que les paramètres de l'installation conduisent à des nombres sans dimension inclus dans le domaine expérimenté.

CHAPITRE V

MESURE DE L' AIRE DE CONTACT

- SOMMAIRE -

V - 1 BUT DE L'ETUDE

V - 2 TECHNIQUE DE MESURE DE L'AIRE DE CONTACT

V - 2 - 1 Description de la méthode photographique

V - 2 - 2 Méthode de dépouillement des clichés

V - 3 PRINCIPE DU DEPOUILLEMENT

V - 4 RESULTATS

V - 4 - 1 Etude de l'influence de τ , a , d_p

V - 4 - 2 Influence de la vitesse d'agitation sur
l'accroissement de l'aire de contact

V - 5 CONCLUSION

- NOTATIONS -

A	Aire de contact réelle entre le lit granulaire et la paroi
A_o	Aire de contact géométrique
a	Maître-couple des pales par unité de longueur
D	Diamètre du mélangeur
d_p	Diamètre des sphères de verre
Fr	Nombre de FROUDE
g	Accélération de la pesanteur
H	Coefficient de transfert moyen à la paroi
L	Longueur du mélangeur
N	Vitesse de rotation de l'agitateur
X	Caractéristique rhéologique globale du lit granulaire
β	Demi-angle au sommet soutendant l'aire de contact réelle = $\frac{A}{L D}$
β_o	Demi-angle au sommet soutendant l'aire de contact géométrique $\frac{A_o}{L D}$
ρ	Masse spécifique apparente du lit
τ	Taux de remplissage

V - 1 BUT DE L'ETUDE

La connaissance de l'aire de contact entre le lit granulaire et la paroi du mélangeur complète l'information acquise sur le comportement du matériau agité en précisant le degré de déformation de la charge sous l'effet des différents paramètres envisagés.

Elle servira ultérieurement lors de l'étude du transfert de chaleur entre la paroi et le lit granulaire. La méthode envisagée permet, en effet, de mesurer la conductance du transfert AH : on accède au coefficient de transfert H en divisant la conductance par la valeur A de l'aire de contact mesurée dans les mêmes conditions expérimentales.

Dans cet exposé, nous nous bornerons à la mesure de l'aire de contact du lit "compact" ; en effet, si certaines particules ayant une trajectoire libre, heurtent la paroi, leur temps de contact avec celle-ci est trop bref pour que ce phénomène influence de manière sensible le couple de frottement ou le transfert de chaleur.

V - 2 TECHNIQUE DE MESURE DE L'AIRE DE CONTACT

Les mesures de l'aire de contact ont été effectuées en même temps que l'étude du couple nécessaire à l'agitation ; on a utilisé une méthode photographique.

V - 2 - 1 Description de la méthode photographique

Les parois latérales transparentes du mélangeur permettent de photographier le profil du lit. Comme les joues supportant les pales sont lisses, les effets de bout sont négligeables ; dans ces conditions, nous avons choisi de mettre au point l'appareil photographique sur la face antérieure du mélangeur.

Aux vitesses élevées de rotation de l'agitateur, l'aire de contact fluctue à chaque passage des pales ; nous avons donc pris quatre clichés de manière à obtenir la configuration correspondant à différentes positions des pales. Pour obtenir des clichés suffisamment nets,

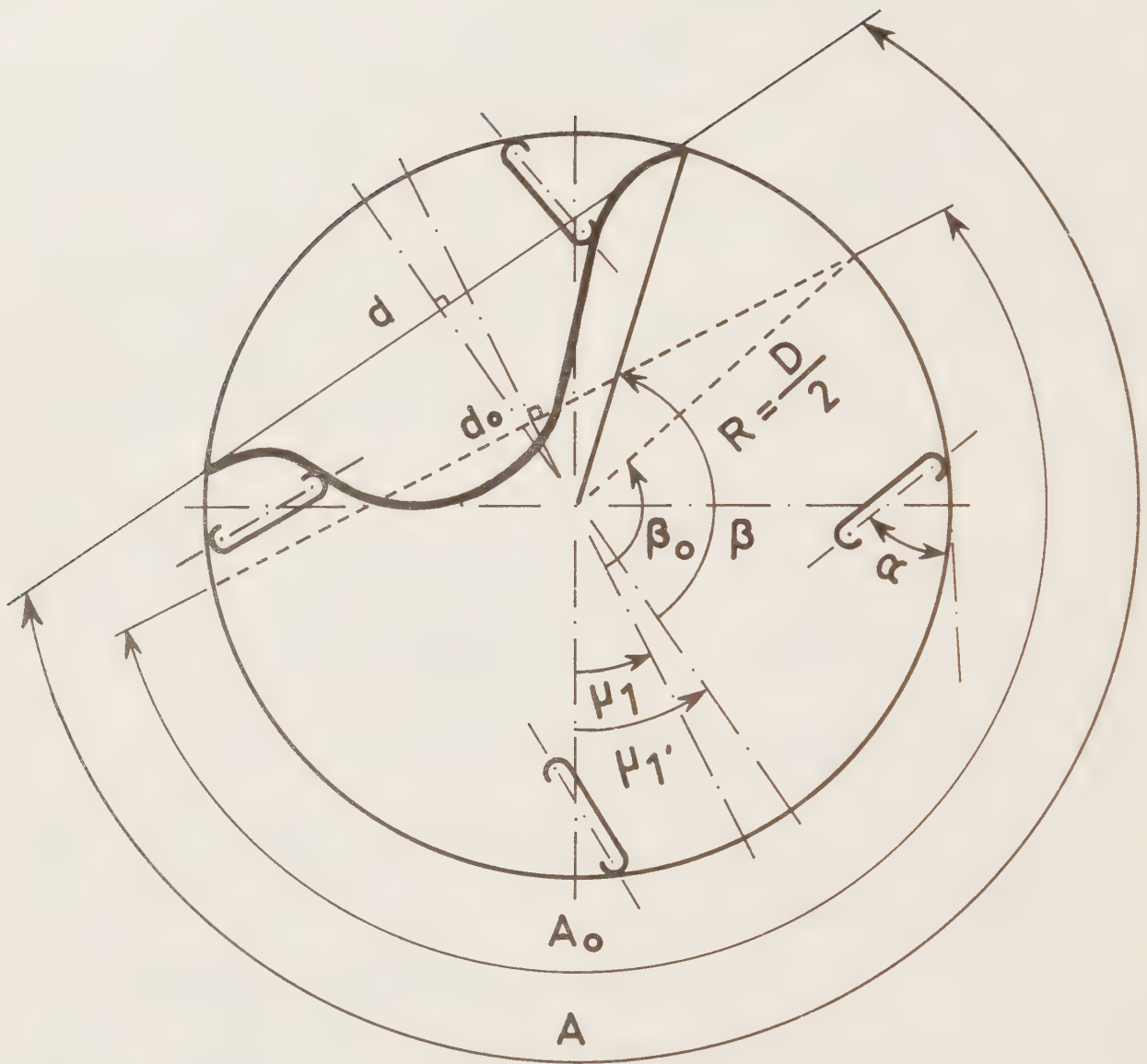


Fig. V-1 Profil d'un lit de billes agité .

il a fallu opérer avec une vitesse d'obturation de l'ordre de 1/1000 de seconde. On a utilisé du film ILFORD 800 ASA et une lampe quartz-iode de 1000 watts comme éclairage d'appoint.

V - 2 - 2 Méthode de dépouillement des clichés

Les films projetés sur un verre dépoli fournissent des images analogues à la figure V - 1 ; on y a en plus représenté, en pointillé le profil du lit au repos.

Les expressions des aires de contact entre le lit et la paroi du mélangeur sont données par :

$$A_o = D L \beta_o \quad \text{V - 1}$$

pour le lit au repos

$$\text{et} \quad A = D L \beta \quad \text{V - 2}$$

pour le lit agité.

En fait, nous mesurons sur les projections l'angle 2β ; cette valeur est d'ailleurs la moyenne de quatre mesures car, ainsi que nous l'indiquions plus haut, l'aire de contact varie avec la position des pales.

N.B. : Lorsque la vitesse de rotation de l'agitateur est très élevée ($Fr > 8.10^{-3}$), il se produit une coupure dans le lit ; pendant qu'une pale continue à emporter un certain nombre de particules, le reste du lit s'écroule sur la pale suivante.

Deux cas se sont présentés :

- a) la coupure est franche et on peut mesurer l'aire de contact du lit compact ;
- b) un nuage dense formé par les billes qui déferlent de la pale sortant du lit et par celles qui ont été entraînées, masque le profil du lit "compact". La détermination correcte de l'aire de contact est alors impossible.

V - 3 PRINCIPE DU DEPOUILLEMENT

On a là encore cherché à représenter les résultats en s'aidant de l'analyse dimensionnelle.

On peut penser a priori que l'aire de contact A est fonction :

- de la vitesse de rotation N
- du maître-couple des pales par unité de longueur a
- du taux de remplissage τ
- du champ de pesanteur g
- du diamètre D et de la longueur L du mélangeur
- du matériau granulaire caractérisé par ρ , dp, X.

L'analyse dimensionnelle montre que la masse spécifique des billes n'intervient pas directement ; on obtient finalement :

$$\frac{A}{LD} = \text{fct} \left(\frac{N^2 D}{g}, \frac{a}{D}, \frac{dp}{D}, X, \tau \right) \quad \text{V - 3}$$

Néanmoins, plutôt que de rechercher des relations de la forme V - 3, il nous a paru intéressant d'introduire l'aire relative A/A_0 en désignant par A_0 l'aire de contact entre le lit au repos et la paroi pour un taux de remplissage donné. Il est aisé de montrer que A_0 et τ sont des grandeurs liées ; en effet (fig. VI), l'élimination de β_0 entre V - 1 et :

$$\tau = \frac{1}{\pi} \left(\beta_0 - \frac{\sin 2 \beta_0}{2} \right) \quad \text{V - 4}$$

conduit à :

$$\tau = \frac{1}{\pi} \left(\frac{A_0}{DL} - \frac{1}{2} \sin \frac{2 A_0}{DL} \right) \quad \text{V - 5}$$

De ce fait, il est possible que la quantité A/A_0 dépende notablement moins de τ que le nombre A/LD ; on a donc recherché des relations de la forme :

$$\frac{A}{A_0} = \text{fct} \left(\frac{N^2 D}{g}, \frac{a}{D}, \frac{dp}{D}, X, \tau \right) \quad \text{V - 6}$$

Le rapport A/A_0 exprime la variation de l'aire de contact sous l'influence des différents paramètres envisagés ; sa valeur découle des relations V - 1 et V - 2 vues au paragraphe précédent ; on a évidemment :

$$A/A_0 = \beta / \beta_0 \quad V - 7$$

V - 4 RESULTATS

V - 4 - 1 Etude de l'influence de τ , a et dp

A vitesse constante, on a examiné simultanément l'influence des trois paramètres τ , a et dp . La figure V - 2 montre, à titre d'exemple les résultats obtenus à deux vitesses d'agitation situées au voisinage des limites extrêmes du domaine étudié : chaque point est la moyenne des mesures faites sur les quatre clichés correspondants ; les segments joignent les mesures les plus différentes de la moyenne et constituent une image de l'incertitude expérimentale. On constate que les résultats sont convenablement représentés par des droites horizontales : les points se répartissent en effet au hasard à l'intérieur des deux domaines délimités par les horizontales (en pointillés) figurant les écarts de $\pm 5\%$ de la valeur moyenne ; on notera cependant une augmentation plus sensible de l'aire de contact à la vitesse d'agitation élevée pour les taux de remplissage extrêmes.

Compte tenu de l'imprécision des mesures, nous concluerons que le taux de remplissage, le maître-couple des pales et le diamètre des particules n'ont pas d'influence significative sur l'aire de contact du lit avec la paroi du mélangeur. La relation V - 6 se réduit donc à :

$$\frac{A}{A_0} = \text{fct} \left(\frac{N^2 D}{g} \right) \quad V - 8$$

V - 4 - 2 Influence de la vitesse d'agitation sur l'accroissement de l'aire de contact

Comme le taux de remplissage, le maître-couple des pales et le diamètre des particules ne jouent pas un rôle significatif sur

$\frac{dp}{D} \backslash \frac{a}{D}$	0,1	0,15	0,2
$15 \cdot 10^{-3}$	○	△	□
$5 \cdot 10^{-3}$	⊙	▲	▣
10^{-3}	●	▲	■
$4 \cdot 10^{-4}$	⊕	▲	⊞

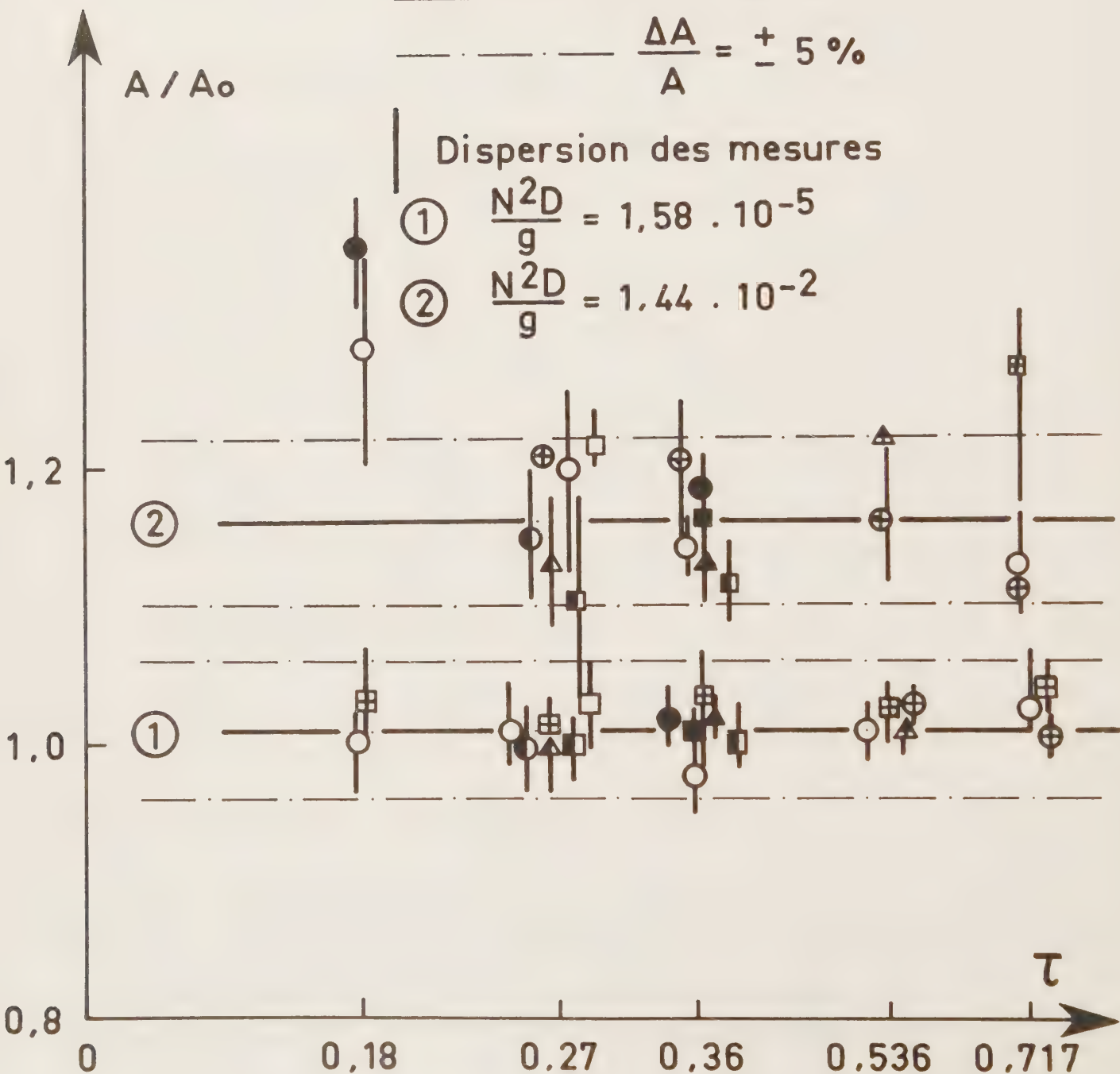


Fig. V-2

l'accroissement de l'aire de contact, nous avons regroupé toutes les mesures relatives à la même vitesse d'agitation : de ce fait, chacun des points représentés sur la figure V - 4 correspond à la moyenne d'environ 80 mesures.

En coordonnées cartésiennes, on a porté A/A_0 en fonction de $\sqrt{Fr}$ c'est-à-dire en fonction de la vitesse d'agitation N . La courbe (2) (figure V - 3) montre que les résultats sont convenablement représentés par la droite d'équation :

$$\frac{A}{A_0} = 1,01 + 1,2 \sqrt{Fr} \quad V - 9$$

Cette relation est valable dans tout le domaine expérimental exploré qui s'étend jusqu'au voisinage de la vitesse de précentrifugation ; cette vitesse a été estimée par analogie avec les cylindres tournants à l'aide de l'équation III - 2.

V - 4 - 2 - 1 Autres expressions de A/A_0

Il est classique en génie chimique d'écrire l'équation V - 9 sous la forme particulière :

$$A/A_0 = k \left(\frac{N^2 D}{g} \right)^u \quad V - 10$$

C'est d'ailleurs la philosophie que nous avons adoptée pour rendre compte de la variation du couple et celle que nous adopterons en ce qui concerne la conductance de transfert AH . Dès lors, pour expliciter le coefficient de transfert H , il est utile d'exprimer la variation de l'aire de contact A à l'aide d'équations ayant la forme V - 10.

La détermination de la constante et de l'exposant de la relation V - 10 est faite à l'aide de la courbe (1) de la figure V - 4 où les résultats sont portés en coordonnées logarithmiques ; on constate qu'il faut distinguer deux domaines :

(1) le premier correspond aux faibles vitesses d'agitation ; l'aire de contact y varie d'une manière peu significative ; on propose cependant pour :

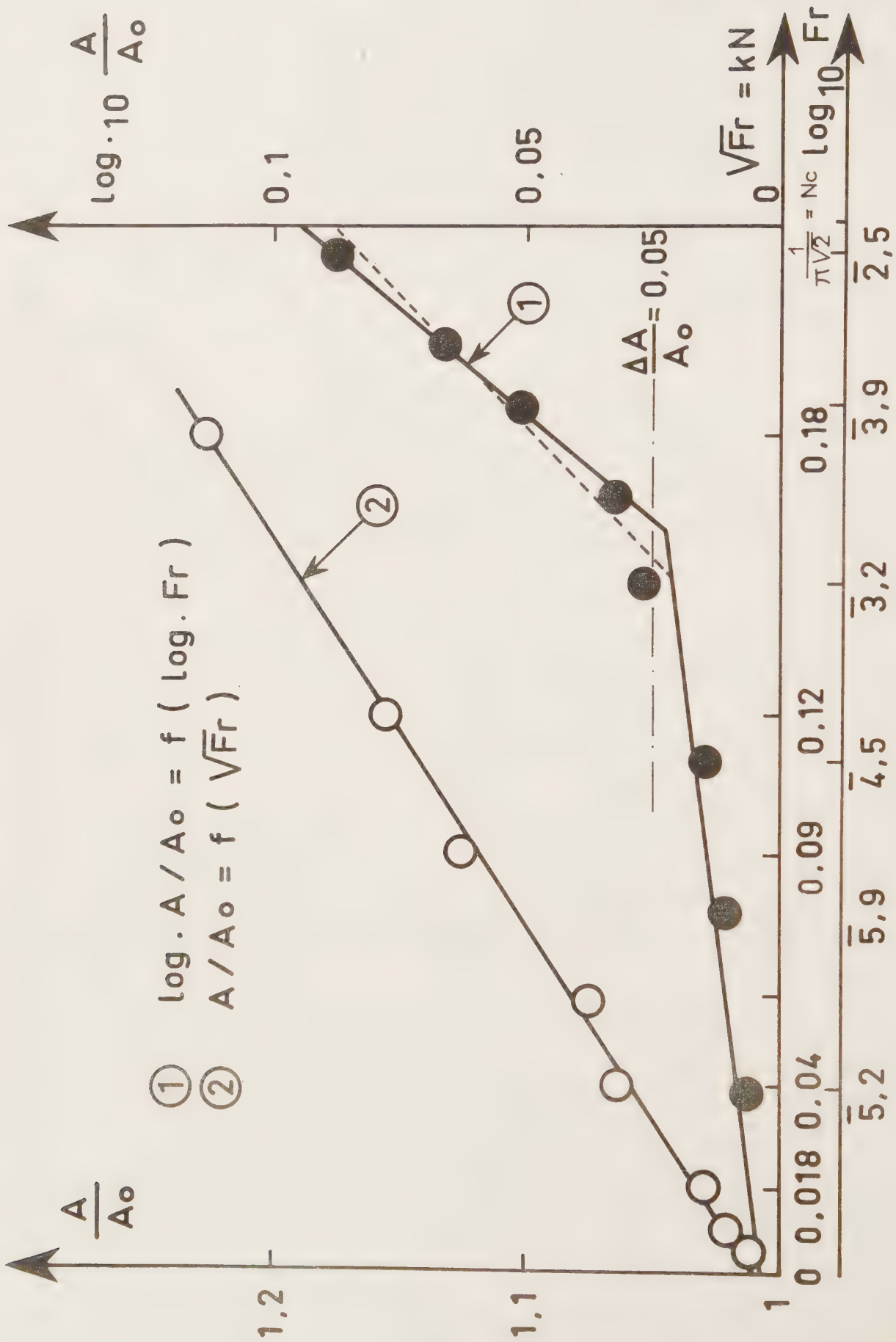


Fig. V-3 . Accroissement de l'aire de contact avec la vitesse d'agitation .

$$1,58.10^{-5} \leq Fr \leq 1,58.10^{-3}$$

la relation :

$$A/A_0 = 1,09 Fr^{0,007} \quad V - 11$$

(2) le deuxième correspond aux vitesses supérieures à 0,417 t/s, il s'étend jusqu'au voisinage de la vitesse de précentrifugation. Dans ce domaine défini par :

$$3,5.10^{-3} \leq Fr \leq 3,2.10^{-2}$$

l'aire de contact croît de façon plus sensible et peut-être représentée par :

$$A/A_0 = 1,51 Fr^{0,06} \quad V - 12$$

Si l'on borne le domaine par la valeur caractéristique $Fr = 1,58.10^{-3}$ mise en évidence lors de l'étude du couple, on a alors (courbe en pointillés) :

$$1,58.10^{-3} \leq Fr \leq 3,2.10^{-2}$$

$$A/A_0 = 1,44 Fr^{0,05} \quad V - 13$$

V - 5 CONCLUSION

Les paramètres tels que le taux de remplissage, le maître-couple des pales et le diamètre des particules n'influencent pas l'accroissement relatif de l'aire de contact entre le lit granulaire et la paroi d'un mélangeur horizontal du type double cadre.

Tant que la vitesse de rotation de l'agitateur conduit à un nombre de FROUDE inférieur à $1,58.10^{-3}$, cette aire de contact peut être considérée égale à l'aire géométrique avec une erreur inférieure à 5%.

Au-dessus de ce nombre de FROUDE, l'influence de la vitesse est bien représentée par la relation :

$$A/A_0 = 1,51 Fr^{0,06} \quad V - 12$$

avec

$$Fr \in (3,5 \cdot 10^{-3}, 3,2 \cdot 10^{-2})$$

L'influence de la vitesse d'agitation sur l'accroissement de l'aire de contact est malheureusement trop faible pour que la comparaison de ces résultats avec ceux relatifs à la mesure du couple apporte des renseignements exploitables sur le rôle des forces de frottement à la paroi, d'autant que la dilatation du lit que nous n'avons pas étudiée ici, perturbe les champs de force en son voisinage.

o

o

o

CHAPITRE VI

INTERPRETATION DES RESULTATS EXPERIMENTAUX

- SOMMAIRE -

VI - 1 INTRODUCTION

VI - 1 - 1 Remarques préliminaires

VI - 1 - 2 Plan de l'exposé

VI - 2 ANALYSE DU COMPORTEMENT DU LIT GRANULAIRE : MODELE PROPOSE
POUR LE CALCUL DU COUPLE INSTANTANE $\hat{D}$ AU CHAMP DE PESANTEUR

VI - 2 - 1 Analyse du comportement du lit granulaire ;
hypothèses

VI - 2 - 2 Calcul du couple instatané exercé par une
pale motrice

VI - 3 MODELE DE CALCUL DU COUPLE MOYEN

VI - 3 - 1 Expression du couple moyen

VI - 3 - 2 Application numérique

VI - 3 - 3 Détermination du couple maximal en régime
d'agitation

VI - 3 - 4 Critique du modèle

VI - 3 - 5 Conclusion

VI - 4 INTRODUCTION DES FORCES DE FROTTEMENT DANS LE LIT SOULEVE

VI - 4 - 1 Considérations préliminaires - Rappels

VI - 4 - 2 Modèle utilisé pour tenir compte des forces
de frottement

VI - 4 - 3 Modèle de calcul du coefficient de poussée
moyen

VI - 4 - 4 Conclusion

- NOTATIONS -

- A Aire représentant le volume du lit instantanément soulevé par la pale motrice
- C Couple réel appliqué à l'agitateur
- C^* Couple instantané par unité de longueur du mélangeur
- C_g Couple instantané dû aux seules forces de pesanteur
- $\bar{C}$ Couple moyen
- $C_{g \max}^*$ Couple maximal dû aux seules forces de pesanteur en régime d'agitation et rapporté à l'unité de longueur du mélangeur
- C_l^* Couple par rapport à ω dans le modèle utilisé pour tenir compte des forces de frottement
- D Diamètre du mélangeur
- g Accélération de la pesanteur
- H Hauteur du lit
- H_o Ordonnée de ω
- h^* Profondeur d'immersion du volume élémentaire considéré dans le lit horizontal
- h' Profondeur d'immersion d'un point P de la pale motrice dans le lit
- h Hauteur équivalente d'immersion dans l'analogie hydrostatique proposée
- K_p Coefficient de poussée
- l Déplacement élémentaire de référence de la pale
- l_{ij} Déplacement de la pale de la position i à la position j
- R Rayon du mélangeur
- r Distance d'un point du lit à l'axe du mélangeur
- W_{ij} Travail de la pale de la position i à la position j
- β_o Demi-angle au sommet soutenant l'aire de contact géométrique du lit avec la paroi

β	Angle de frottement interne
ρ	Masse spécifique apparente du matériau
θ_p	Angle polaire repéré par rapport à la verticale et caractérisant la position de la pale motrice
θ_{pm}	Position de la pale quand elle devient "motrice"
θ_1	Valeur particulière de θ_{pm} définie par l'équation VI - 10
σ_2^*	Contrainte principale verticale = $\rho g h$
σ_2	Contrainte principale dans l'analogie hydrostatique proposée : $\rho g h$
σ_1	Contrainte principale majeure dans un lit passif
σ_3	Contrainte principale mineure dans un lit actif
$\bar{\sigma}$	Contrainte moyenne définie par l'équation VI - 25

VI - INTRODUCTION

Au chapitre IV, nous avons établi différentes relations empiriques qui permettent de rendre compte de la variation du couple nécessaire à l'agitation du lit granulaire ; seule l'influence du taux de remplissage τ_y est prépondérante. En première approximation, on a en effet :

$$\frac{\bar{C}^x}{\rho D^3 g''} = 0,22 \tau^1 ; 0,09 \leq \tau \leq 0,717 \quad \text{VI - 1}$$

$$\frac{\bar{C}^x}{\rho D^3 g} = 0,18 \tau^{0,8} ; 0,27 \leq \tau \leq 0,717 \quad \text{VI - 2}$$

Dans ce chapitre, nous nous proposons en nous appuyant sur un modèle simple :

- 1) de justifier ces relations et en particulier l'influence du taux de remplissage ;
- 2) de préciser les interactions entre les pales de l'agitateur et le lit granulaire ;
- 3) de mettre en évidence le rôle d'une propriété rhéologique du matériau, l'angle de frottement interne qui n'a pu être déterminé de manière satisfaisante lors de l'étude expérimentale ;
- 4) de montrer que le taux de remplissage et l'angle de frottement interne donc le diamètre des particules pourraient ne pas avoir une action indépendante sur le couple nécessaire à l'agitation.

VI - 1 - 1 Remarques préliminaires

Comme la valeur du couple moyen est très peu affectée par la vitesse de rotation de l'agitateur, il est inutile de tenter une analogie avec les liquides visqueux pour expliquer le comportement du lit granulaire.

Nous avons donc été amenés à aborder le problème sous l'angle de la mécanique des sols ; on se rappelle que, dans cette discipline la force nécessaire pour provoquer le glissement doit vaincre les forces de pesanteur et les forces de frottement. Néanmoins, étant donné que les contraintes qui se développent dans le matériau granulaire sont uniquement fonction de la pression régnant en son sein (chapitre I, § I-1), nous avons, dans le but de mettre en évidence la contribution des frottements lors de l'agitation, arbitrairement séparé les deux phénomènes.

Cette philosophie a déjà été adoptée par ROSE et SULLIVAN (R7) et JULOU et LE GOFF (J5) pour calculer le couple qu'il convient d'exercer sur un cylindre tournant en fonction du taux de remplissage : le couple ainsi calculé présente vis-à-vis du taux de remplissage, la même loi de variation que le couple réel.

VI - 1 - 2 Plan de l'exposé

Nous proposerons tout d'abord un modèle permettant d'estimer le couple instantané exercé par l'agitateur pour vaincre uniquement les forces de pesanteur. En nous appuyant sur une analyse du comportement des pales dans le lit granulaire, nous en déduirons l'expression du couple moyen et montrerons qu'elle rend compte de l'influence du taux de remplissage conformément aux équations VI - 1 et 2 bien que les valeurs prédites soient trop faibles. Enfin, nous proposerons une méthode de calcul du coefficient de poussée qui tient compte des forces de frottement dans le lit.

VI - II ANALYSE DU COMPORTEMENT DU LIT GRANULAIRE ; MODELE PROPOSE POUR LE CALCUL DU COUPLE INSTANTANE DU AU CHAMP DE PESANTEUR

VI - 2 - 1 Analyse du comportement du lit granulaire ; hypothèses

Aux faibles vitesses de rotation de l'agitateur, le lit apparaît limité, à sa partie supérieure, par une surface inclinée et sensiblement plane qui oscille légèrement autour d'une position d'équilibre (fig. VI - 1). Ce mouvement s'explique aisément ; au cours de la

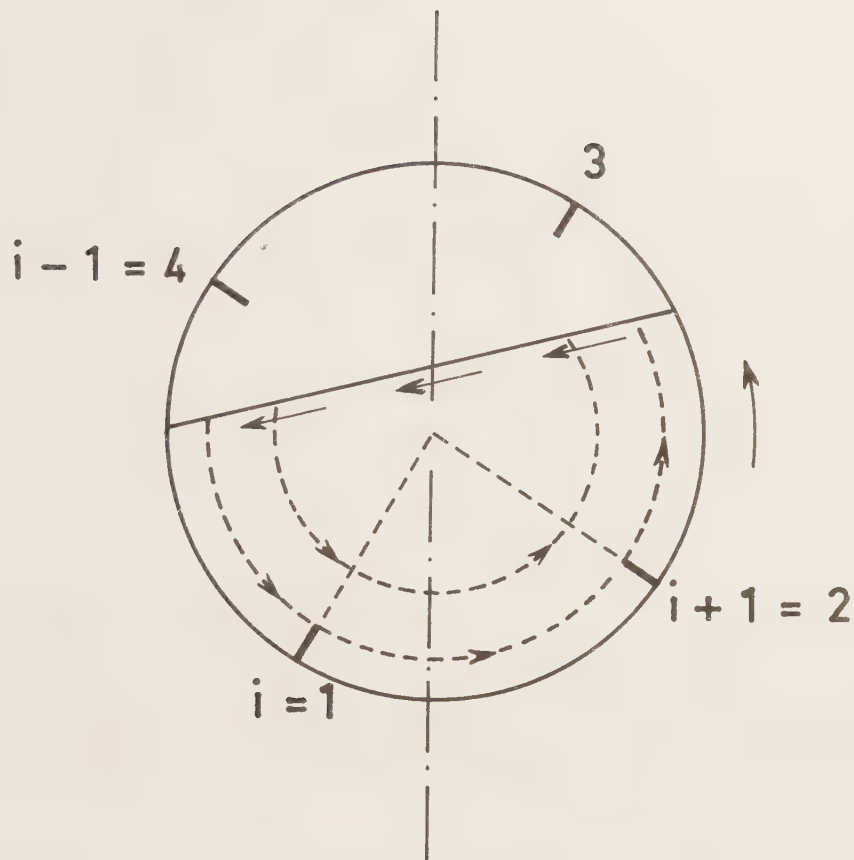


Fig. VI-1 . Aspect schématique du lit granulaire ;
forme , trajectoires des particules .

rotation de l'agitateur, on constate, en effet la succession des deux phénomènes suivants :

1°) L'ensemble du lit granulaire est entraîné en rotation. Cette observation s'accorde avec les travaux de NOVOSAD et STANDART (N5) ; en effet, dans un cylindre vertical, ces auteurs ont constaté qu'un agitateur à ailettes met totalement en mouvement la charge qui le surmonte tant que sa hauteur est inférieure à dix fois celle de l'ailette ; cette condition est bien satisfaite dans le cas de notre étude.

Au cours de l'entraînement, on observe que les particules suivent des trajectoires circulaires sans glissement apparent : nous admettons donc, au moins au voisinage de la génératrice inférieure du mélangeur, que les pales se comportent comme des pales "théoriques" s'étendant radialement jusqu'à l'axe (1,2 fig. VI - 1).

2°) Lorsque l'inclinaison résultant du mouvement d'ensemble est suffisante, un plan de glissement apparaît et les particules voisines de l'interface s'écoulent vers les régions d'énergie potentielle plus faible ; il s'ensuit une légère diminution de l'inclinaison de la surface libre. Nous supposons que les pales théoriques ne s'opposent pas à ce mouvement.

En fait, au cours de la succession de ces deux phénomènes, la variation de l'inclinaison de la surface libre est négligeable. Le couple de basculement du lit granulaire est donc équilibré par des couples antagonistes dont la somme est sensiblement constante. On ne peut les attribuer uniquement à l'agitateur puisque le couple auquel il est soumis présente une variation périodique (cf. fig. VI - 6).

Ceci nous a conduit, en nous appuyant sur le comportement des lits actif et passif de part et d'autre d'un écran en déplacement à envisager que l'agitateur s'oppose seulement au couple de basculement de la fraction passive de la charge à l'aval d'une pale dite motrice.

Pale motrice, pale inerte

Nous dirons qu'une pale théorique i est motrice si (fig.VI-1) :

- 1) la portion du lit granulaire comprise entre i et $i + 1$ exerce un couple qui s'oppose au mouvement de l'agitateur ;

2) la portion du lit granulaire comprise entre les pales $i - 1$ et i exerce un couple (on verra ci-dessus qu'il est actif donc négligeable) qui tend à faciliter le mouvement de l'agitateur.

A chaque instant, l'agitateur ne possède donc qu'une seule pale motrice ; les autres seront dites inertes : c'est en particulier le cas de la pale $i + 1$ bien qu'elle participe à soulever le lit granulaire en aval de la pale i .

A l'arrière de la pale motrice, le lit est actif puisqu'il s'écoule spontanément dans le champ de pesanteur ; dans le cas du milieu étudié dont l'angle de frottement interne est voisin de 30° , on a vu au paragraphe I - 5 que sa poussée est faible : selon NOVOSAD (N3), le couple correspondant ne dépasse pas 3 % du couple total. Il n'y a donc pas lieu de tenir compte des particules situées derrière la pale motrice.

Compte tenu de ce qui précède, nous admettrons finalement que le couple instantané dû au seul champ de pesanteur est égal au moment de la portion de lit granulaire comprise :

a) entre le rayon vecteur aboutissant à la pale motrice et la surface libre lorsque le taux de remplissage est inférieur à 0,5 (aire hachurée - figure VI - 2).

b) entre le rayon vecteur aboutissant à la pale motrice, la surface libre et le plan de symétrie vertical du mélangeur lorsque le taux de remplissage est supérieur à 0,5 (aire hachurée fig. VI - 3).

Nous supposerons en outre :

a) que la surface libre du lit est un plan π incliné d'un angle constant sur l'horizontale ; c'est par définition l'angle de repos qui dans le cas de notre étude, est égal à l'angle de frottement interne μ (§ II - 3) ;

b) que les effets de bout et les frottements à la paroi sont négligeables ;

c) que l'accélération centrifuge est négligeable.

Le moment par rapport à l'axe de l'agitateur des portions hachurées sur les figures VI - 2 et 3 varie évidemment avec la position de la pale repérée par son angle polaire θ_p . Il conviendra donc d'en prendre la valeur moyenne en tenant compte de l'entrée en action successive des pales au cours de la rotation de l'agitateur. Nous examinerons ce problème après avoir calculé l'expression du couple instantané.

VI - 2 - 2 Calcul du couple instantané exercé sur une pale motrice.

Les calculs qui suivent sont fondés sur l'intégration des moments élémentaires des forces de pesanteur s'exerçant sur la partie du lit en aval de la pale ; le couple appliqué par la pale sur cette fraction du lit lui est égal et opposé.

Une autre méthode de calcul, plus complexe, est exposée en annexe ; fondée sur une analogie hydrostatique particulière à laquelle nous aurons recours pour introduire la notion de coefficient de poussée au paragraphe VI - 4, elle conduit à des relations identiques ($\tau > 0,5$) ou très voisines ($\tau < 0,5$).

Si r et θ désignent le rayon vecteur et l'angle polaire d'un point du milieu granulaire, le moment $d^2C_g^*$ des forces de pesanteur s'exerçant sur le volume élémentaire $r dr d\theta$ par unité de longueur du mélangeur, s'écrit :

$$d^2C_g^* = \rho g r^2 dr d\theta \sin\theta \quad \text{VI - 3}$$

La valeur du couple exercé par le lit en amont de la pale s'en déduit ; elle est donnée par :

$$C_g^* = \iint_A d^2C_g^* \quad \text{VI - 4}$$

A désignant l'aire hachurée sur les figures VI - 2 ou 3.

Le calcul de l'intégrale double VI - 4 est différent selon que le taux de remplissage est inférieur ou supérieur à 0,5.

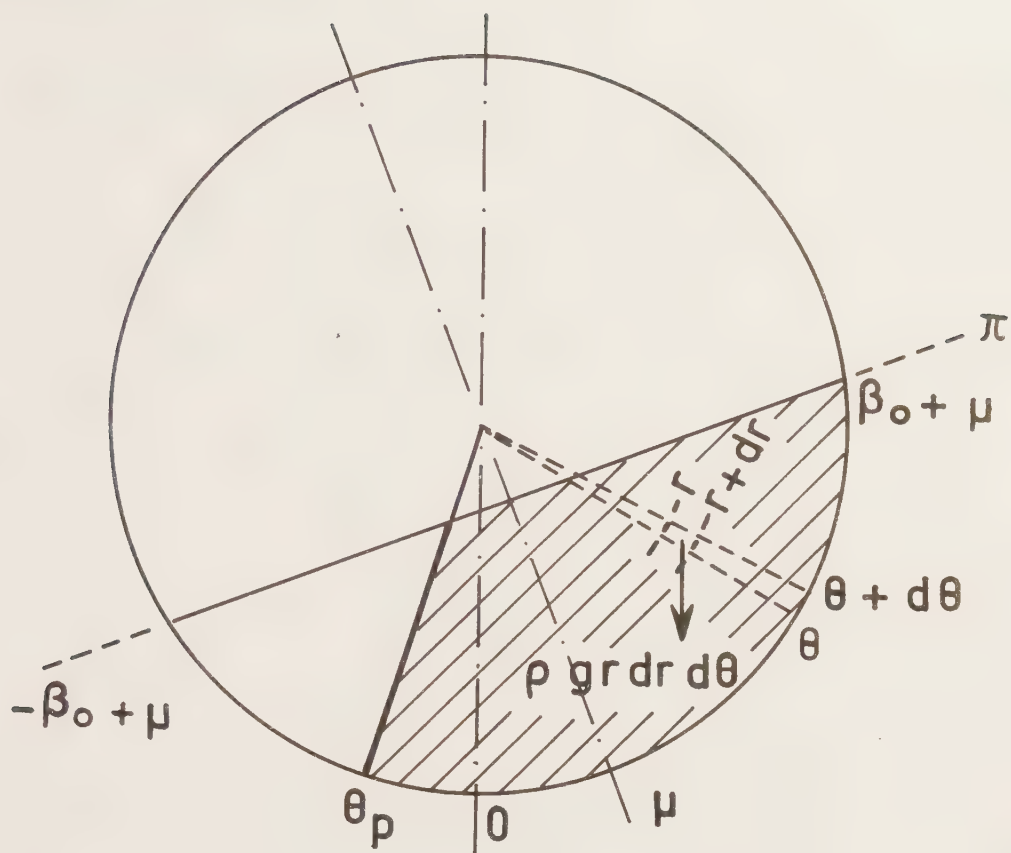


Fig . VI-2 . Partie du lit soulevée par une pale pleine pour $\tau < 0,5$.

VI-2-2-1 Cas des taux de remplissage inférieurs à 0,5

Pour une pale inclinée de θ_p (fig. VI - 2), l'intégrale VI - 4 s'écrit évidemment :

$$C_g^* = \rho g \int_{\theta_p}^{\beta_o + \mu} \int_{\frac{R \cos \beta_o}{\cos(\theta - \mu)}}^R r^2 \sin \theta \, d\theta$$

Le calcul de cette expression a été effectué en intégrant d'abord sur r puis sur θ ; il vient successivement :

$$dC_g^* = \rho g \sin \theta \, d\theta \int_{\frac{R \cos \beta_o}{\cos(\theta - \mu)}}^R r^2 \, dr$$

$$\text{soit } dC_g^* = \frac{\rho g R^3}{3} \left(1 - \frac{\cos^3 \beta_o}{\cos^3(\theta - \mu)} \right) \sin \theta \, d\theta$$

puis :

$$C_g^* = \int_{\theta_p}^{\beta_o + \mu} dC_g^* = \frac{\rho g R^3}{3} \left\{ \cos \theta_p - \cos(\beta_o + \mu) - \cos^3 \beta_o \int_{\theta_p}^{\beta_o + \mu} \frac{\sin \theta \, d\theta}{\cos^3(\theta - \mu)} \right\}$$

D'où finalement :

$$C_g^* = \frac{\rho g R^3}{3} \left\{ \cos \theta_p - \cos(\beta_o + \mu) - \cos^3 \beta_o \left[\frac{\cos}{2 \cos^2 \beta_o} + \sin \mu \operatorname{tg} \beta_o - \frac{\cos \mu}{2 \cos^2(\theta_p - \mu)} - \sin \mu \operatorname{tg}(\theta_p - \mu) \right] \right\} \quad \text{VI - 5}$$

VI-2-2-2 Cas des taux de remplissage supérieurs à 0,5

On est amené à distinguer deux zones (a) et (b) d'aires A_a et A_b auxquelles correspondent les couples par unité de longueur C_{ga} et C_{gb} . Dans ces conditions :

$$C_g^* = C_{ga}^* + C_{gb}^* = \iint_{A_a} d^2 C_g^* + \iint_{A_b} d^2 C_g^* \quad \text{VI - 6}$$

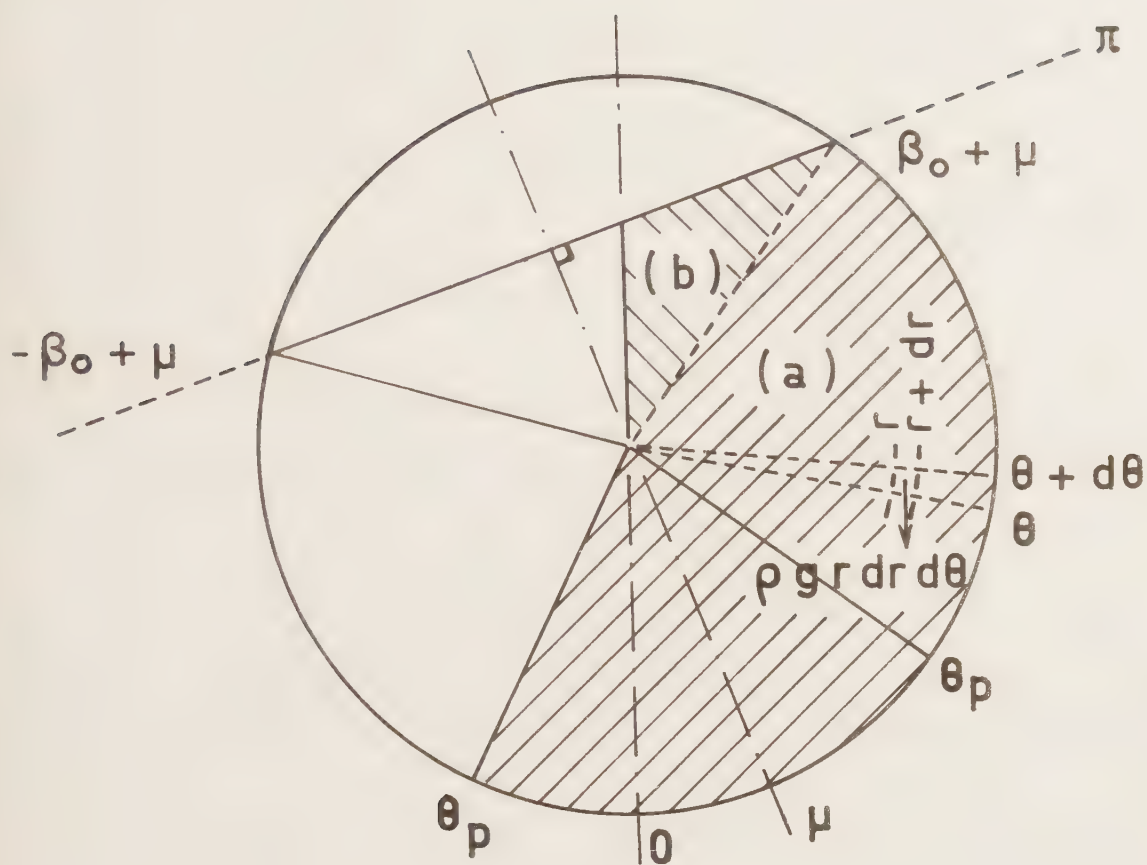


Fig. VI-3 . Partie du lit soulevée par une pale pleine pour $\tau > 0,5$.

a) Calcul de C_{ga}^*

On a évidemment :

$$C_{ga}^* = \int_{\theta_p}^{\beta_o + \mu} \int_0^R d^2 C_g^*$$

Un calcul analogue au précédent conduit à :

$$C_{ga}^* = \frac{\rho g R^3}{3} \left(\cos \theta_p - \cos (\beta_o + \mu) \right)$$

b) Calcul de C_{gb}^*

Compte tenu de la forme de l'aire A_b (fig. VI - 3), il vient :

$$C_{gb}^* = \int_{\beta_o + \mu}^{\pi} \int_0^{\frac{R \cos \beta_o}{\cos(\theta - \mu)}} d^2 C_g^*$$

L'intégration sur r puis sur θ conduit aux expressions intermédiaires suivantes :

$$d C_{gb}^* = \rho g \sin \theta d \theta \int_0^{\frac{R \cos \beta_o}{\cos(\theta - \mu)}} r^2 dr = \frac{\rho g R^3}{3} \sin \theta d \theta \frac{\cos^3 \beta_o}{\cos^3(\theta - \mu)}$$

puis :

$$C_{gb}^* = \int_{\beta_o + \mu}^{\pi} d C_{gb}^* = \frac{g R^3 \rho}{3} \cos^3 \beta_o \int_{\beta_o + \mu}^{\pi} \frac{\sin \theta d \theta}{\cos^3(\theta - \mu)}$$

c'est à dire, tous calculs faits :

$$C_{gb}^* = \frac{\rho g R^3}{3} \cos^3 \beta_o \left(\frac{1}{2 \cos \mu} - \frac{\sin^2 \mu}{\cos \mu} - \frac{\cos \mu}{2 \cos^2 \beta_o} - \sin \mu \operatorname{tg} \beta_o \right)$$

c) Expression de C_g^* pour $\tau > 0,5$

En tenant compte de VI - 6, on obtient finalement comme expression du couple instantané exercé par toute la partie hachurée :

$$C_g^* = \frac{\rho g R^3}{3} \left\{ \cos \theta_p - \cos (\beta_o + \mu) - \cos^3 \beta_o \left(\frac{\cos \mu}{2 \cos^2 \beta_o} + \sin \mu \operatorname{tg} \beta_o \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2 \cos \mu} + \frac{\sin^2 \mu}{\cos \mu} \right) \right\} \quad \text{VI - 7}$$

VI - 3 MODELE DE CALCUL DU COUPLE MOYEN

D'après nos hypothèses, les expressions VI - 5 et VI - 7 qui donnent le couple instantané C_g^* sollicitant l'agitateur ne sont valables pour une pale donnée que dans le domaine où elle est motrice. Du fait de la périodicité d'ordre 4 de l'agitateur, une pale i qui devient motrice à l'angle θ_{pm} cesse de l'être (sauf aux très faibles taux de remplissage) en $\theta_{pm} + \frac{\pi}{2}$ puisque la pale $i - 1$ atteint alors θ_{pm} et devient elle-même motrice.

Le couple moyen est donc en général donné par l'expression :

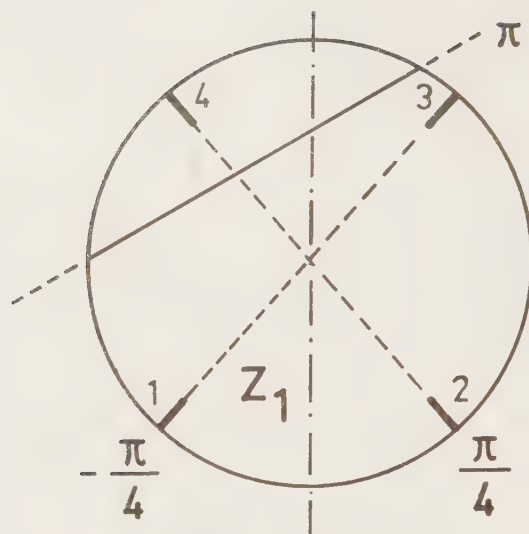
$$C_g^* = \frac{2}{\pi} \int_{\theta_{pm}}^{\theta_{pm} + \frac{\pi}{2}} C_g^* d\theta_p \quad \text{VI - 8}$$

VI - 3 - 1 Expressions du couple moyen

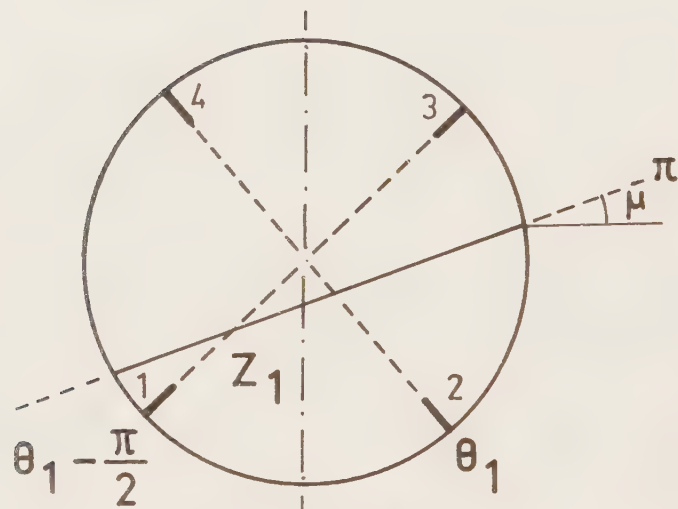
Les bornes d'intégration varient avec le taux de remplissage ; on distingue 4 cas :

1) $\tau > 0,5$

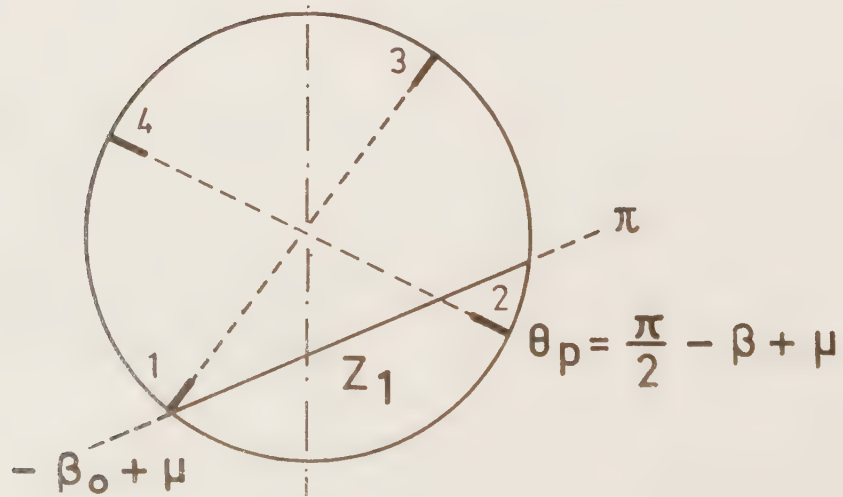
Compte tenu de la définition de la pale motrice, on a évidemment $\theta_{pm} = -\pi/4$ puisqu'alors le centre de gravité de la zone Z_1 (fig. VI - 4 (a)) est sur la verticale.



a) $\tau > 0,5$



b) $\tau > \tau^*$



c) $\tau > 0,091$

Fig . VI-4 . Répartition du couple. (Agitateur type double cadre.)

L'intégration de VI - 8 avec C_g donnée par VI - 5 conduit à l'expression :

$$\bar{C}_g^* = \frac{\rho g R^3}{3} \left\{ \frac{2\sqrt{2}}{\pi} - \cos(\beta_0 + \mu) - \cos^3 \beta_0 \left(\frac{\cos \mu}{2 \cos^2 \beta_0} + \sin \mu \operatorname{tg} \beta_0 \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2 \cos \mu} + \frac{\sin^2 \mu}{\cos \mu} \right) \right\} \quad \text{VI - 9}$$

$$2) \quad \tau^* < \tau < 0,5$$

Lorsque le remplissage devient inférieur à la moitié du mélangeur, le diamètre vertical ne peut plus être un plan de symétrie de la zone Z_1 , puisque la surface du lit agité n'est jamais horizontale pour les matériaux granulaires ($\mu \neq 0$).

La pale (1) (fig. VI - 4b) devient alors motrice en une position $\theta_{pm} = \theta_1 - \frac{\pi}{2} \neq -\pi/4$ telle que le moment de la zone Z_1 soit nul. On montre aisément, par des calculs analogues à ceux du paragraphe VI - 2 que θ_1 satisfait l'équation :

$$\sin \theta_1 - \cos \theta_1 = \cos^3 \beta_0 \left\{ \operatorname{tg}(\theta_1 - \mu) + \frac{1}{\operatorname{tg}(\theta_1 - \mu)} \right\} \left\{ \frac{\cos \mu}{2} \left(\operatorname{tg}(\theta_1 - \mu) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{\operatorname{tg}(\theta_1 - \mu)} \right) + \sin \mu \right\} \quad \text{VI - 10}$$

La résolution de l'équation VI - 10 donne la fonction $\theta_1(\beta_0, \mu)$ c'est-à-dire, puisque μ est sensiblement constant dans notre étude, la fonction $\theta_1(\beta_0)$; on obtient alors en intégrant l'équation VI - 5 :

$$C_g^* = \frac{\rho g R^3}{3} \left\{ \frac{2}{\pi} (\cos \theta_1 + \sin \theta_1) - \cos(\beta_0 + \mu) \right. \\ \left. - \cos^3 \beta_0 \left(\frac{\cos \mu}{2 \cos^2 \beta_0} + \sin \mu \operatorname{tg} \beta_0 - \frac{\cos \mu}{\pi} \left(\operatorname{tg}(\theta_1 - \mu) + \frac{1}{\operatorname{tg}(\theta_1 - \mu)} \right) \right) \right. \\ \left. + \frac{2 \cos^3 \beta_0}{\pi} \sin \mu \ln \operatorname{tg}(\theta_1 - \mu) \right\} \quad \text{VI - 11}$$

En fait, comme le domaine de remplissage est relativement faible et que β_0 reste voisin de $\frac{\pi}{2}$, l'équation VI - 10 montre que :

$$\cos \theta_1 \approx \sin \theta_1$$

soit $\theta_1 = \frac{\pi}{4} - \epsilon$ VI - 12

Nous avons donc finalement utilisé pour notre application numérique $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$ dans l'équation VI - 11.

L'équation VI - 11 reste valable tant que le taux de remplissage est supérieur à la valeur τ définie par l'angle β_0 satisfaisant :

$$-\beta_0^* + \mu = \theta_1^* - \frac{\pi}{2}$$

Au-dessous, l'équation VI - 10 n'a plus de solution ; en tenant compte de la relation approchée VI - 12, on en déduit que β_0^* est voisin de $\frac{\pi}{4} + \mu$ donc τ^* de 0,31.

3) $0,091 < \tau < \tau^*$

Lorsque le taux de remplissage est inférieur à τ^* , nous avons admis (fig. VI - 4c) que la pale (1) devient active dès qu'elle touche le lit. Le couple moyen est alors donné par :

$$\bar{C}_g^* = \frac{2}{\pi} \int_{-\beta_0 + \mu}^{\frac{\pi}{2} - \beta_0 + \mu} C_g d\theta_p$$

Pour en avoir l'expression, il suffit de remplacer dans VI - 11 θ_1 par :

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2} - \beta_0 + \mu$$

On obtient alors :

$$C_g^* = \frac{\rho g R^3}{3} \left\{ \begin{aligned} & \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cos \left(\frac{\pi}{4} - \beta_0 + \mu \right) - \cos (\beta_0 + \mu) \\ & - \cos^3 \beta_0 \left[\frac{\cos \mu}{2 \cos^2 \beta_0} + \sin \mu \operatorname{tg} \beta_0 - \frac{\cos \mu}{\pi} \left(\operatorname{tg} (\beta_0) + \operatorname{cotg} (\beta_0) \right) \right] \\ & + \frac{2 \cos^3 \beta_0}{\pi} \sin \mu \ln \operatorname{cotg} \beta_0 \end{aligned} \right.$$

VI - 13

4) $\tau < 0,091$

Pour ces taux de remplissage très faibles, il existe des périodes, au cours d'une révolution de l'agitateur pendant lesquelles aucune pale ne baigne dans le lit ; le couple instantané s'annule alors après chaque passage de pale, ce que nous avons constaté expérimentalement. Dans ce cas, les quatre pales sont évidemment indépendantes.

Le couple moyen est alors donné par :

$$\bar{C}_g^* = \frac{2}{\pi} \int_{-\beta_0 + \mu}^{\beta_0 + \mu} C_g^* d\theta_p$$

c'est-à-dire :

$$\bar{C}_g^* = \frac{\rho g R}{3} \cdot \frac{2}{\pi} \left[(2 + \cos^2 \beta_0) \sin \beta_0 - \beta_0 (3 \cos \beta_0 - 2 \sin^3 \beta_0 \operatorname{tg} \mu) \right] \text{VI - 14}$$

VI - 3 - 2 Application numérique

L'élimination de β_0 entre l'équation :

$$\tau = \frac{1}{\pi} \left(\beta_0 - \frac{\sin^2 \beta_0}{2} \right) \quad (\text{cf. éq. V - 4})$$

et les expressions VI - 9, 11, 13 et 14 que nous venons de démontrer fournit la variation du couple moyen dû au seul champ de pesanteur en fonction du taux de remplissage. Ce système d'équations a été résolu point par point en attribuant à l'angle de repos dynamique la valeur moyenne des angles consignés dans le tableau II - 4 : $\mu = 26^\circ 5$. Les points calculés (cf. tableau VI - 1) ont été portés en coordonnées logarithmiques sur la figure VI - 5. Au-dessous de $\tau = 0,75$, ils sont raisonnablement alignés. Toutefois, comme dans le dépouillement des résultats expérimentaux on constate qu'il est préférable d'utiliser deux relations distinctes selon l'étendue du domaine de variation de τ . Elles s'écrivent respectivement :

a) $0,09 < \tau < 0,75$

$$\frac{\bar{C}_g^*}{\rho g R^3} = 0,9 \cdot \tau \quad \text{VI - 2 - 15}$$

b) $0,249 < \tau < 0,75$

$$\frac{\bar{C}_g^*}{\rho g R^3} = 0,8 \tau^{0,8} \quad \text{VI - 2 - 16}$$

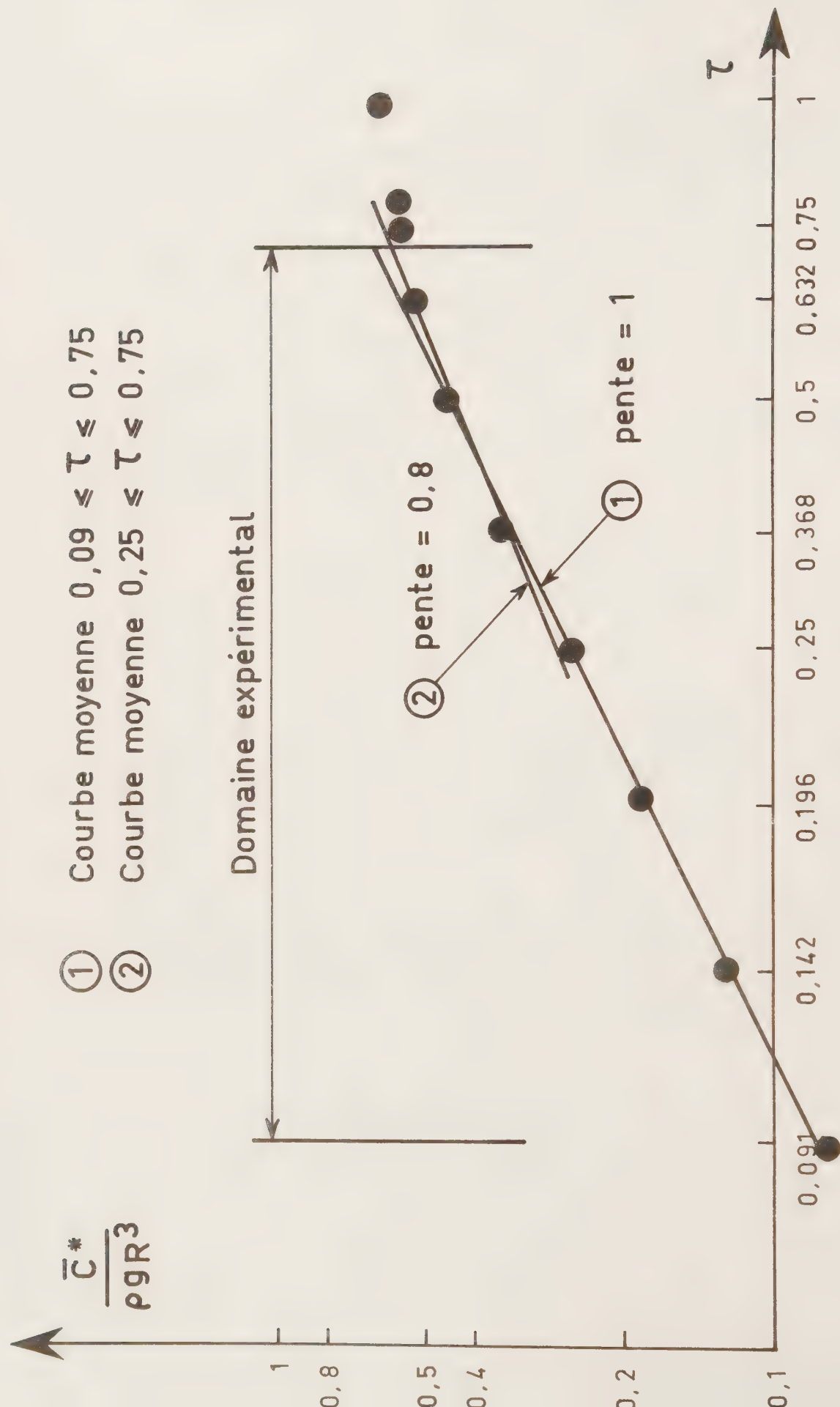


Fig. VI-5 . Résolution graphique des équations du modèle .

β_o	τ	$\frac{\bar{C}^*}{\rho \text{ g R}^3}$	$\frac{C_{\max}^*}{\rho \text{ g R}^3}$	$\frac{C_{\max}^*}{\bar{C}}$
53°	0,142	0,125	0,168	1,34
60°	0,196	0,18	0,22	1,22
66°	0,249	0,24	0,28	1,16
78°	0,368	0,345	0,385	1,1
90°	0,5	0,45	0,485	1,08
102°	0,632	0,530	0,563	1,065
114°	0,75	0,50	0,624	1,56
-----	-----	-----	-----	-----
120°	0,805	0,608	0,64	1,05
180°	1	0,633	0,666	1,05

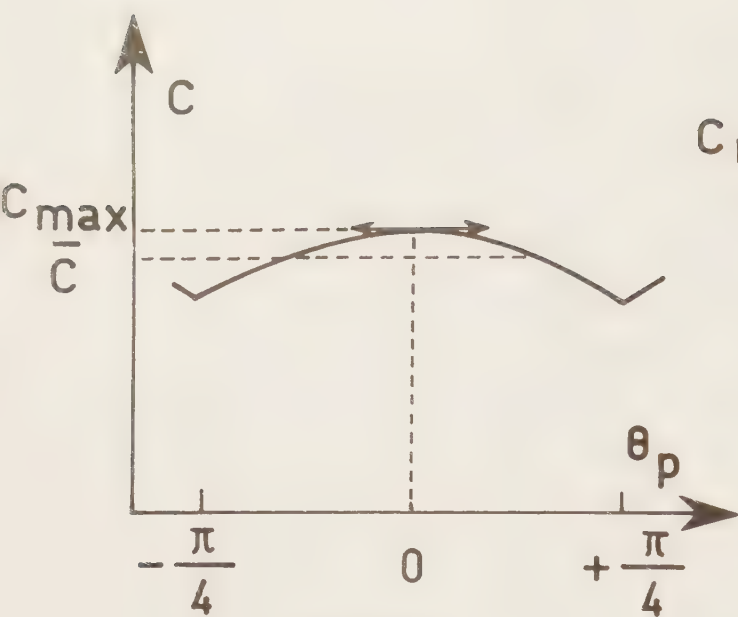
TABLEAU VI -1

VI - 3 - 3 Critique du modèle

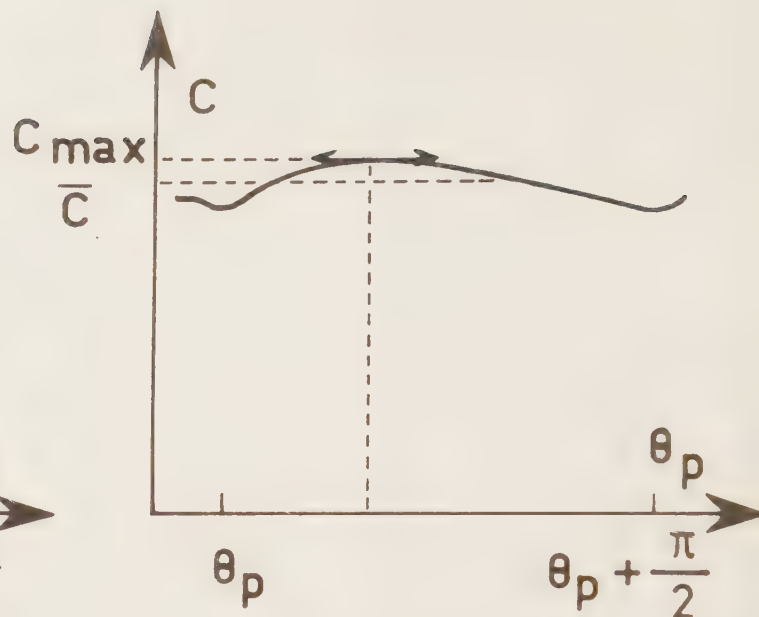
La comparaison des équations VI -15 et VI - 1 d'une part et VI - 16 et VI - 2 d'autre part montre que le modèle proposé représente convenablement l'évolution du couple nécessaire à l'agitation lorsque l'on fait varier le taux de remplissage. Cependant, les valeurs obtenues sont environ deux fois trop faibles : il apparaît donc que les forces de frottement jouent un rôle important.

Deux autres critiques peuvent être faites au modèle en comparant les couples instantanés calculés et enregistrés :

- les figures VI-5-a₁ et a₂ montrent que, contrairement aux résultats de l'équation VI - 7, les enregistrements sont toujours dissymétriques même pour les remplissages supérieurs à la moitié.

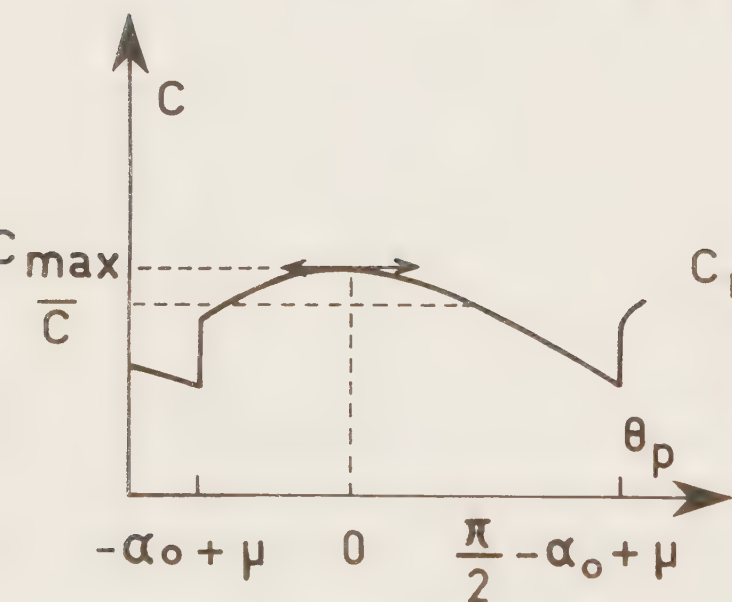


a) Modèle

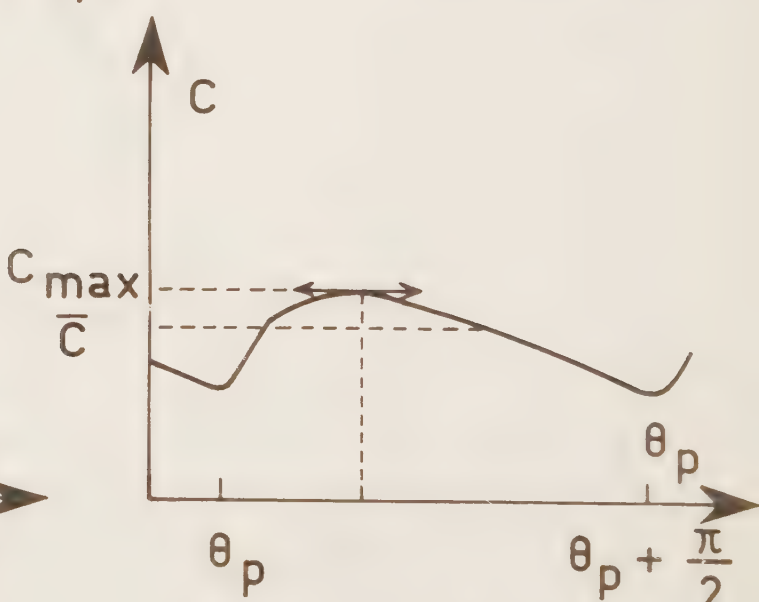


a) Couple enregistré

a) $\tau > 0,5$



b₁) Modèle



b₂) Couple enregistré

b) $0,81 < \tau < \tau^*$

Fig. VI-6 . Allure du couple instantané aux faibles vitesses d'agitation .

- aux taux de remplissage relativement faibles, le couple instantané calculé par l'équation VI - 3 manifeste une discontinuité qui n'a pas de signification physique ; toutefois, on remarque (Fig. VI-5-b₂) que le couple enregistré présente alors un accroissement brusque dès que la pale commence à travailler.

VI - 3 - 4 Détermination du couple maximal en régime d'agitation

Nous avons déjà signalé que le couple instantané exercé par la pale motrice n'est pas constant ; les équations VI - 5 et VI - 7 montrent que sa valeur maximale est atteinte pour $\theta_0 = 0$ (Figure VI - a₁). Elle est donnée quel que soit le taux de remplissage par l'expression unique :

$$C_{g\max}^* = \frac{\rho g R^3}{3} \left(1 - \cos(\beta_0 + \mu) - \cos^3 \beta_0 \left(\frac{\cos \mu}{2 \cos^2 \beta_0} + \sin \mu \operatorname{tg} \beta_0 - \frac{1}{2 \cos \mu} + \frac{\sin^2 \mu}{\cos \mu} \right) \right) \quad \text{VI - 17}$$

Le rapport théorique du couple maximal au couple moyen est fonction de τ . Il s'écrit puisque la variation du couple nécessaire à vaincre les seules forces de pesanteur est analogue à celle du couple total et que les effets de bout sont négligeables :

$$\frac{C_{\max}}{\bar{C}} = \frac{C_{g\max}^*}{\bar{C}_g^*} \quad \text{VI - 18}$$

Dans cette équation, la valeur de $C_{g\max}^*$ est donnée par la relation VI - 17 et $\bar{C}_g^*$ par les expressions VI - 9, 11, 13 et 14.

Les valeurs calculées indépendantes de la vitesse de rotation de l'agitateur sont consignées dans le tableau VI - 1.

Au chapitre IV, on a montré (Fig. IV - 22) qu'elles se comparent bien avec les résultats expérimentaux.

VI - 3 - 5 Conclusion

Bien qu'il ne tienne pas compte des forces de frottement en aval de la pale, le modèle simple que nous avons développé donne une variation convenable du couple nécessaire à l'agitation en fonction du taux de remplissage.

L'examen des équations VI - 9, 11, 13 et 14 montre que le nombre de couple est une fonction complexe de β_0 qui définit le taux de remplissage et de l'angle de frottement interne μ qui caractérise le comportement rhéologique du lit ; ces deux paramètres n'ont manifestement pas une action indépendante. Néanmoins, comme μ reste généralement compris entre 25° et 35° , son influence est très faible vis-à-vis du taux de remplissage. C'est ce qui nous a permis, dans le cas de l'étude expérimentale où μ varie entre 25 et 28° (tableau II - 4) de considérer qu'en première approximation ces deux paramètres sont indépendants ; on verra d'ailleurs au paragraphe suivant que l'angle de frottement interne apparaît seul dans le coefficient de poussée qui tient compte des forces de frottement au sein du lit.

VI - 4 INTRODUCTION DES FORCES DE FROTTEMENT DANS LE LIT SOULEVE

Dans le paragraphe précédent, nous avons supposé qu'il n'y a pas de dégradation d'énergie sous forme de frottement dans le lit situé en aval de la pale motrice mais seulement en amont de manière que ces forces compensent les forces de pesanteur. Cette philosophie nous a permis de calculer le travail contre les forces de pesanteur.

Nous nous proposons maintenant, à l'aide des résultats essentiels de la mécanique des sols de déterminer la contribution des frottements lors de l'agitation d'un lit granulaire.

Avant d'aborder l'étude quantitative proprement dite, nous rappellerons quelques développements plus complexes de la mécanique des sols qui n'ont pas été exposés dans le premier chapitre.

VI - 4 - 1 Considérations préliminaires - Rappels

La théorie de COULOMB exposée au paragraphe I - 5 dans le cas d'un lit granulaire de surface horizontale déformé par un écran plan vertical et lisse a été étendue par RANKINE à la déformation des sols inclinés d'un angle Ω ($-\mu < \Omega < +\mu$) sous l'action d'écrans rugueux faisant un angle β avec l'horizontale (C7). Cet auteur propose deux équations relativement compliquées qui correspondent aux deux états limites d'équilibre plastique. A partir de ces relations, CAQUOT et KERISEL (C8) ont tabulé les valeurs de la force appliquée sur l'écran

en fonction des différents paramètres μ, ϕ, Ω et β et établi des abaques de calcul. Les équations de RANKINE qui n'ont donné lieu à aucune vérification expérimentale précise sont couramment utilisées en Génie Civil pour le calcul des murs de soutènement inclinés. Aucune, malheureusement ne s'applique à notre mélangeur ; en effet, l'équation relative à l'état passif du lit entraîne une discontinuité du couple instantané beaucoup trop importante à chaque "attaque" de pale

$\frac{C_{\theta_{pm}}}{C_{\theta_{pm} + \frac{\pi}{2}}} \sim 4$; quant à l'équation relative à l'état actif, elle donne un couple moyen nettement inférieur au couple dû au champ de pesanteur. On conçoit d'ailleurs que ce modèle ne soit pas applicable car il suppose des surfaces de rupture planes qui sont difficilement compatibles avec la géométrie de notre mélangeur.

D'autres états d'équilibre ont été définis en mécanique des sols ; citons :

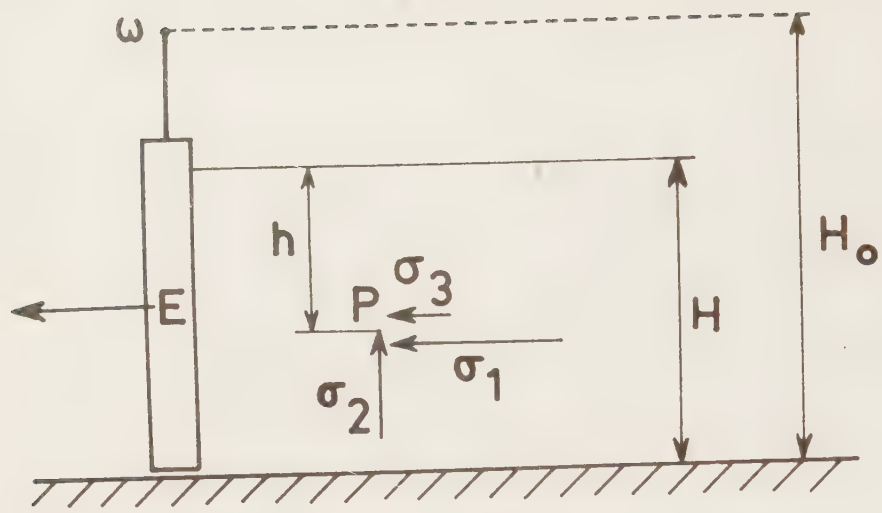
- l'état de BOUSSINESQ qui suppose des lignes de glissement circulaires ; compatible avec les hypothèses que nous avons faites, il ne peut malheureusement se développer au-delà d'une zone comprise dans un angle d'une vingtaine de degré au voisinage de l'écran ;

- l'état de PRANDTL dans lequel les lignes de glissement sont des spirales logarithmiques.

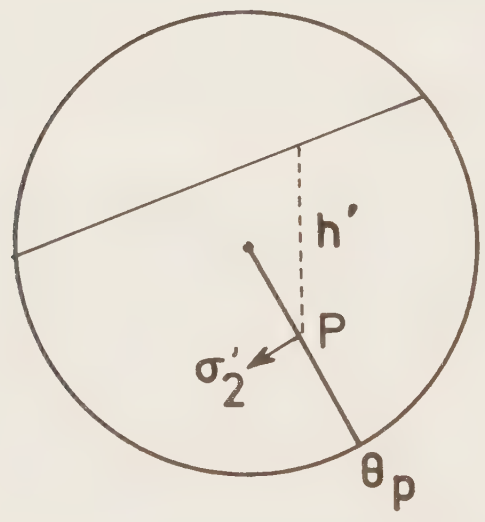
En fait, les états d'équilibre de BOUSSINESQ, de PRANDTL et de RANKINE se développent successivement à partir de la pale et de nombreux auteurs (Chapitre III) ont arbitrairement représenté la ligne de rupture par des spirales logarithmiques en vue d'approcher le phénomène global (N1, N3, B7). Devant la difficulté de cette philosophie dans le cas d'un agitateur à quatre pales dépendantes, il nous a semblé préférable de calculer la contribution des frottements pour une configuration particulière de l'agitateur puis d'étendre les résultats obtenus à tout le lit agité à l'aide de quelques remarques.

VI - 4 - 2 Modèle utilisé pour tenir compte des forces de frottement

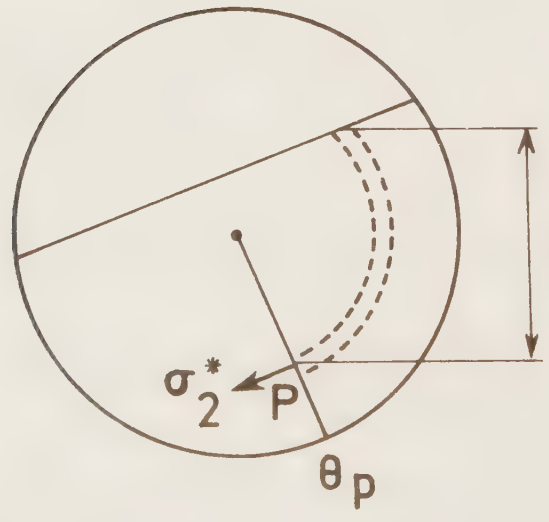
Dans un lit sans distorsion, limité par une surface libre horizontale, nous avons vu au chapitre I que les plans principaux sont horizontal et vertical. σ_2 est donnée par la "pression hydrostatique" :



(a)



(b)



(c)

Fig. VI-7

$$\sigma_2 = \rho gh$$

La contrainte horizontale est différente selon l'état du lit ; elle vaut respectivement (éq. I - 20 et 21) :

$$\sigma_3 = \sigma_2 \frac{1 - \sin \mu}{1 + \sin \mu} = \rho gh \frac{1 - \sin \mu}{1 + \sin \mu} \quad \text{VI - 19}$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 \frac{1 + \sin \mu}{1 - \sin \mu} = \rho gh \frac{1 + \sin \mu}{1 - \sin \mu} \quad \text{VI - 20}$$

selon qu'il est actif ou passif (on suppose qu'il n'y a pas de cohésion $\sigma_a = 0$).

Si l'on remarque que dans un liquide ($\mu = 0$), les contraintes $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sont égales puisque la pression y est indépendante de la direction, le calcul du couple s'exerçant sur un écran tel que E tournant autour de $\omega (H_0)$ revient à faire, tout d'abord, une analogie hydrostatique :

$$C_1^* = \int_0^H (H_0 - H + h) \rho gh \, dh = \int_0^H (H_0 - H + h) \sigma_2 \, dh$$

c'est-à-dire, en ne tenant compte (ainsi que nous l'avons fait jusqu'à maintenant) que des seules forces de pesanteur puis à multiplier C_1 par le coefficient de poussée convenable :

$$K_P = \frac{1 - \sin \mu}{1 + \sin \mu} \quad \text{ou} \quad K_P = \frac{1 + \sin \mu}{1 - \sin \mu}$$

selon que le lit est actif ou passif.

L'extension de cette méthode au calcul du couple instantané s'exerçant sur une pale théorique motrice nous avait conduit dans un premier temps à envisager le modèle décrit par la figure VI - 7b pour obtenir la contribution hydrostatique. Il conduit à supposer que la pression en un point P de la pale est égale à :

$$\sigma_2' = \rho gh'$$

Les calculs que nous ne rapporterons pas fournissent une relation de la forme :

$$\frac{\bar{C}^*}{\rho g R^3} \approx 1,5 \tau^{1,3} \quad \text{VI - 21}$$

en désaccord avec les équations VI - 1 et 2. Nous avons donc rejeté ce modèle pour développer celui qui a été exposé au paragraphe VI - 2.

Une autre analogie hydrostatique est toutefois possible, fondée sur le fait que les trajectoires des particules sont circulaires ; schématisée sur la figure VI - 7c, elle revient à supposer que le "fluide" en aval de la pale motrice est contenu dans les cylindres coaxiaux de telle sorte qu'en un point P, la pression soit égale à :

$$\sigma_2^* = \rho g h^* \quad \text{VI - 22}$$

Les calculs développés en annexe montrent que ce modèle conduit à une équation identique à VI - 7 lorsque le taux de remplissage est supérieur à 0,5 ; lorsqu'il est inférieur, on n'obtient pas exactement l'équation VI - 5 mais l'écart reste très faible dans le domaine utile du taux de remplissage.

Pour tenir compte des frottements dans la partie du lit en aval de la pale motrice, nous nous appuyerons donc sur cette dernière analogie hydrostatique. Nous supposerons que la pale théorique est lisse de manière que les plans principaux lui soient parallèle et normal. Dans ces conditions, d'après ce qui précède, il suffit de multiplier la contribution du seul champ de pesanteur c'est-à-dire les équations instantanées ou moyennes obtenues au paragraphe VI - 2 et 3 par le coefficient de poussée convenable.

Pour que les équations VI - 15 et VI - 16 rendent compte des équations expérimentales VI - 1 et 2, il faut, ainsi que nous l'avons vu, que le coefficient de poussée soit voisin de 2. Examinons quel doit être l'état du lit en aval de la pale motrice pour rendre compte de cette valeur :

a) lit actif

On a alors (éq. VI -19)

$$K_P = \frac{1 - \sin \mu}{1 + \sin \mu}$$

le coefficient de poussée est inférieur à l'unité ; le lit ne peut être actif.

b) lit passif

Le coefficient de poussée (éq. VI - 20)

$$K_P = \frac{1 + \sin \mu}{1 - \sin \mu}$$

est égal à 2,6 pour la valeur moyenne $\mu = 26^\circ 5$. Il est trop élevé. On peut chercher à le corriger en remarquant que l'on a négligé au paragraphe VI - 2 la contribution du lit actif à l'arrière (a) de la pale. Quel que soit r , la "pression hydrostatique" qui y règne σ_{2a}^* est toujours inférieure à σ_2^* (éq. VI - 22) et la contrainte active correspondante :

$$\sigma_{3a} = \frac{1 - \sin \mu}{1 + \sin \mu} \sigma_{2a}^*$$

est faible ; les conclusions restent inchangées : à l'avant de la pale motrice, le lit ne peut pas être entièrement passif.

VI - 4 - 3 Modèle de calcul du coefficient de poussée moyen

Compte tenu de ce qui précède, il nous a semblé logique de supposer que le lit présente successivement les deux états d'équilibre plastiques limites qui se succèdent de manière que les trajectoires globales des particules soient circulaires comme nous l'avons observé.

On considérera dans le calcul que tout le lit est homogène et se trouve dans le même état ; en fait, il est vraisemblable

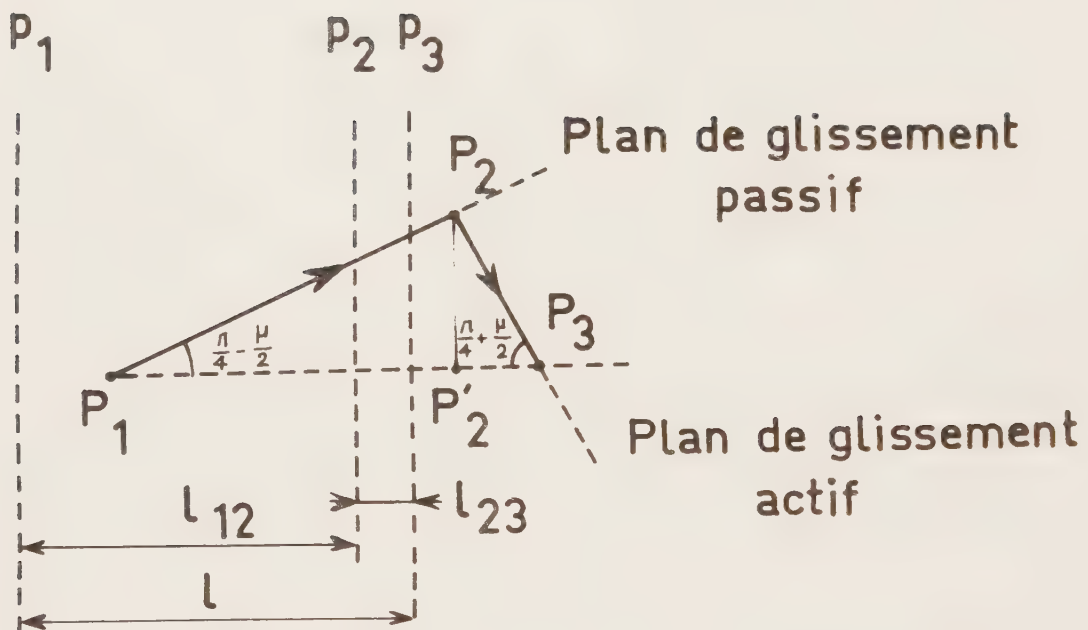


Fig. VI-8 .

que les états coexistent et que le lit est hétérogène avec des zones actives et passives de façon que les parois du mélangeur n'entraînent pas de contraintes de distorsion.

Nous supposons enfin que les états se succèdent suffisamment rapidement pour que l'on puisse assimiler la trajectoire circulaire globale à sa tangente afin d'éviter des calculs de coordonnées intrinsèques.

Considérons donc (fig. VI - 8) une particule P qui reste à une distance constante de la pale p en mouvement. Lorsque la pale se déplace de p_1 à p_2 en poussant le lit passif, la particule suit un plan de glissement passif incliné de $\frac{\pi}{4} - \frac{\mu}{2}$ qui l'amène en P_2 ; le travail fourni par la pale est :

$$W_{12} \simeq \sigma_1 l_{12} \quad \text{VI - 23}$$

La pale se déplace ensuite de p_2 à p_3 dans le lit actif ; la particule suit alors un plan de glissement actif incliné de $\frac{\pi}{4} + \frac{\mu}{2}$ qui l'amène en P_3 de manière que sa trajectoire soit globalement circulaire c'est-à-dire normale à la pale ; le travail fourni durant ce déplacement est égal à :

$$W_{23} \simeq \sigma_3 l_{23} \quad \text{VI - 24}$$

Au cours du déplacement total :

$$l = l_{12} + l_{23}$$

la pale fournit donc le travail :

$$W = W_{12} + W_{23} = \bar{\sigma} \cdot l = \sigma_1 l_{12} + \sigma_3 l_{23} \quad \text{VI - 25}$$

$\bar{\sigma}$ désignant la contrainte moyenne.

On a évidemment, compte tenu des hypothèses faites :

$$P_1 P_3 = 1 \quad ; \quad P_1 P_2 = l_{12} = l \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\mu}{2} \right) \quad ; \quad P_2 P_3 = l_{23} = l \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\mu}{2} \right)$$

Il en résulte :

$$\bar{\sigma} = \sigma_1 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\mu}{2} \right) + \sigma_3 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\mu}{2} \right) \quad \text{VI - 26}$$

ou encore, en exprimant σ_1 et σ_3 en fonction de la contrainte principale σ_2 :

$$\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_2} = \left\{ \frac{1 + \sin \mu}{1 - \sin \mu} \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\mu}{2} \right) + \frac{1 - \sin \mu}{1 + \sin \mu} \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\mu}{2} \right) \right\} \sigma_2^* \quad \text{VI - 27}$$

En tenant compte de la relation trigonométrique :

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$

l'équation VI - 27 se met finalement sous la forme :

$$\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_2} = \frac{(1 + \sin \mu)^3 + (1 - \sin \mu)^3}{2 \cos^2 \mu} = 1 + 4 \operatorname{tg}^2 \mu \quad \text{VI - 28}$$

L'équation VI - 28 exprime le rapport entre la contrainte nécessaire pour provoquer le glissement et la contrainte de pression. C'est le coefficient de poussée. L'application numérique pour $\mu = 26^\circ 5$ fournit la valeur :

$$K_p = 1,98$$

VI - 4 - 4 Conclusion

Malgré ses imperfections puisqu'il suppose que la pale réelle se comporte comme une pale pleine et lisse se déplaçant dans un lit idéal en équilibre et ne tient pas compte de la poussée en amont, le modèle proposé permet donc d'évaluer avec une bonne approximation le coefficient de poussée.

- CONCLUSION -

Dans cet exposé, nous nous sommes intéressés à l'étude de l'influence de la taille des particules sur le comportement des matériaux granulaires et à la détermination du couple nécessaire à leur agitation dans un cylindre horizontal muni d'un agitateur à double cadre en fonction :

- de la vitesse d'agitation
- du taux de remplissage
- du maître couple des pales
- du diamètre des particules

La mesure des angles caractéristiques a montré que, dans le cas de particules identiques sphériques et dures, la taille joue un rôle négligeable sur le comportement du milieu pulvérulent ; en effet, l'angle de frottement interne reste voisin de $26,5^\circ$ et l'angle de frottement externe de 6° pour des billes de verre de diamètre compris entre 0,08 mm et 3 mm. On a seulement noté une croissance non négligeable de la cohésion et de l'adhésion à la paroi pour les diamètres très faibles.

Le couple sollicitant l'agitateur a été mesuré à l'aide d'une technique extensométrique qui s'est avérée très sensible et fiable ; elle nous a permis d'étudier le couple moyen, le couple maximal en régime d'agitation et le couple au démarrage.

Dans un premier temps, nous avons représenté les mesures du couple moyen par des relations empiriques issues de l'analyse dimensionnelle. Les résultats expérimentaux montrent qu'en première approximation, la vitesse de rotation de l'agitateur, le diamètre des particules et le maître-couple des pales n'influencent pas de manière sensible la valeur du couple : dans ces conditions, on obtient, selon l'étendue du domaine des taux de remplissage, les deux équations suivantes :

$$a) \quad 0,09 \quad \tau < 0,72$$

$$\frac{\bar{C}^x}{\rho g D^3} = 0,22 \tau$$

$$b) \quad 0,27 \quad 0,72$$

$$\frac{\bar{C}^x}{\rho g D^3} = 0,18 \quad 0,8$$

dans lesquelles $\bar{C}^x$ représente le couple moyen par unité de longueur, ρ la masse spécifique apparente du lit granulaire, D le diamètre du mélangeur, g l'accélération du champ de pesanteur et τ le taux de remplissage du mélangeur.

La comparaison du couple maximal en régime d'agitation et du couple au démarrage au couple moyen permet de déterminer deux coefficients de sécurité dont il faut tenir compte pour le dimensionnement de l'agitateur et de son système d'entraînement.

L'étude de la déformation du lit granulaire sous l'effet de l'agitation a montré que pour les nombres de Froude inférieurs à $3.19 \cdot 10^{-3}$ (0,417 tour par seconde) l'aire de contact A entre le lit granulaire et la paroi du mélangeur reste égale à l'aire géométrique de contact A_0 avec une erreur inférieure à 5%. Dans le domaine $3.4 \cdot 10^{-3} < Fr < 3,2 \cdot 10^{-2}$, quels que soient le taux de remplissage, le diamètre des particules et le maître couple des pales, on a observé une légère croissance selon l'équation :

$$\frac{A}{A_0} = 1,5 Fr^{0,06}$$

La dernière partie de l'exposé a été consacrée à l'interprétation des résultats.

Nous appuyant, tout d'abord, sur une analyse du comportement de la charge granulaire dans le mélangeur et quelques résultats de la littérature, nous avons introduit le concept de "pale motrice" qui permet de simplifier le calcul de couple exercé.

ANNEXE

- SOMMAIRE -

A - ANALOGIE HYDROSTATIQUE PROPOSEE POUR LE CALCUL DU COUPLE EXERCE
SUR LA PALE

A - 1 Cas des remplissages supérieurs à la moitié

A - 2 Cas des remplissages inférieurs à la moitié

A - 3 Remarque

B - REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- NOTATIONS - .

C_g^*	Couple instantané dû aux seules forces de pesanteur sollicitant l'agitateur et ramené à l'unité de longueur du mélangeur
$C_{g\alpha}^*$	Couple exercé par la zone α de longueur unité sur la pale motrice
g	Accélération de la pesanteur
h^*	Projection sur la vecticale de la colonne de liquide exerçant la pression P sur la pale dans l'analogie hydrostatique
P	Pression hydrostatique agissant en un point de la pale motrice
R	Rayon du mélangeur
r	Distance d'un point du lit à l'axe du mélangeur
β	Demi-angle au sommet soutendant la trajectoire circulaire d'une particule
β_0	Demi-angle au sommet soutendant l'aire géométrique du contact entre le lit et la paroi du mélangeur
μ	Angle de frottement interne
ρ	Masse spécifique apparente du lit
σ_2^*	Contrainte de pression dans l'analogie hydrostatique proposée
θ_p	Angle polaire repéré par rapport à la verticale et caractérisant la position de la pale
θ_{pm}	Position de la pale quand elle devient "motrice"
θ_l	Valeur particulière de θ_{pm} définie par l'équation VI - 10
τ	Taux de remplissage

A - ANALOGIE HYDROSTATIQUE PROPOSEE POUR LE CALCUL DU COUPLE EXERCE SUR LA PALE

Nous avons signalé au chapitre IV que le travail contre les forces de pression doit tenir compte des trajectoires des particules car le lit est incliné. Comme les trajectoires sont globalement circulaires, on admet ici que le lit est équivalent à un fluide compris entre des cylindres coaxiaux.

Pour la conduite des calculs, on est amené comme au chapitre VI, à distinguer les remplissages supérieurs ou égaux à la moitié du mélangeur et les remplissages inférieurs.

A - 1 CAS DES REMPLISSAGES SUPERIEURS A LA MOITIE

Le calcul du couple total s'exerçant sur la pale se ramène dans ce cas au calcul des deux zones a et b de la figure A - 1 - a avec :

$$C_g^* = C_{ga}^* + C_{gb}^* \quad A - 1$$

A - 1 - 1 Calcul du couple C_{ga}^* exercé sur AB

La force de pression exercée sur la pale par une colonne en forme de couronne à la distance r de l'axe est égale à :

$$P = \rho g \cdot \Delta h^* a \quad A - 2$$

avec

$$\Delta h^* = r \cos \theta_p - r \cos (\beta + \mu) \quad A - 3$$

Exprimons $\cos (\beta + \mu)$ à l'aide de la figure A - 1 - a, en comptant h_o positivement :

$$\cos \beta = - \frac{h_o}{r} \quad \text{et} \quad \sin \beta = \frac{\sqrt{r^2 - h_o^2}}{r}$$

$$r \cos (\beta + \mu) = - h_o \cos \mu - \sin \mu \sqrt{r^2 - h_o^2} \quad A - 4$$

La combinaison des relations précédentes donne :

$$P = \rho g (r \cos \theta_p + h_o \cos \mu + \sin \mu \sqrt{r^2 - h_o^2}) \quad A - 5$$

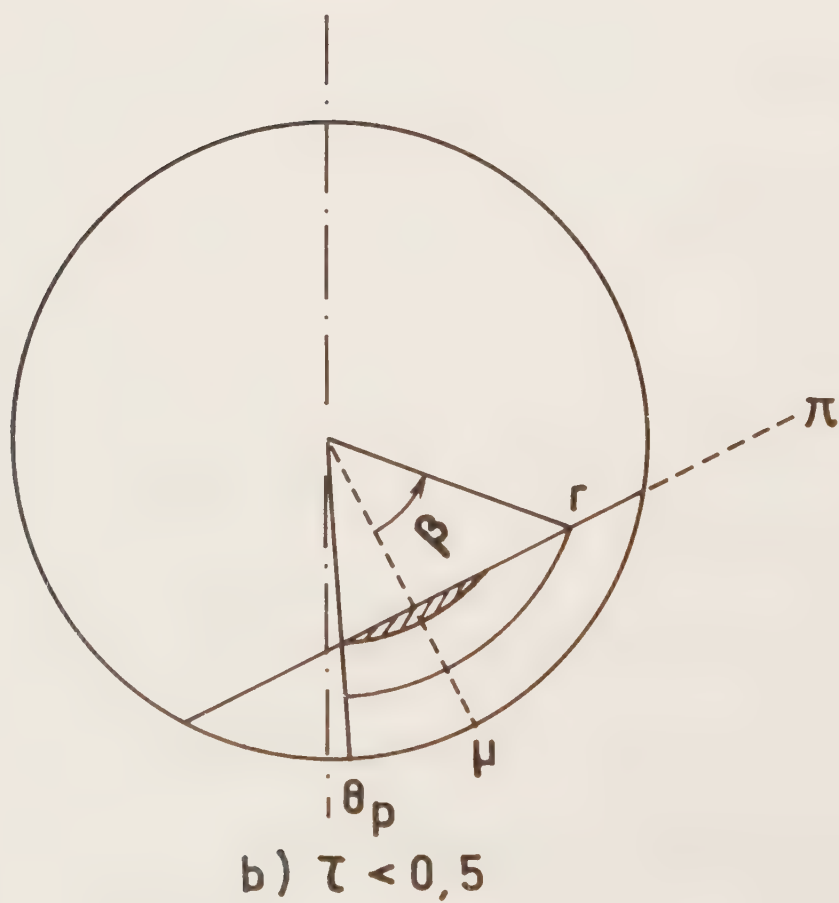
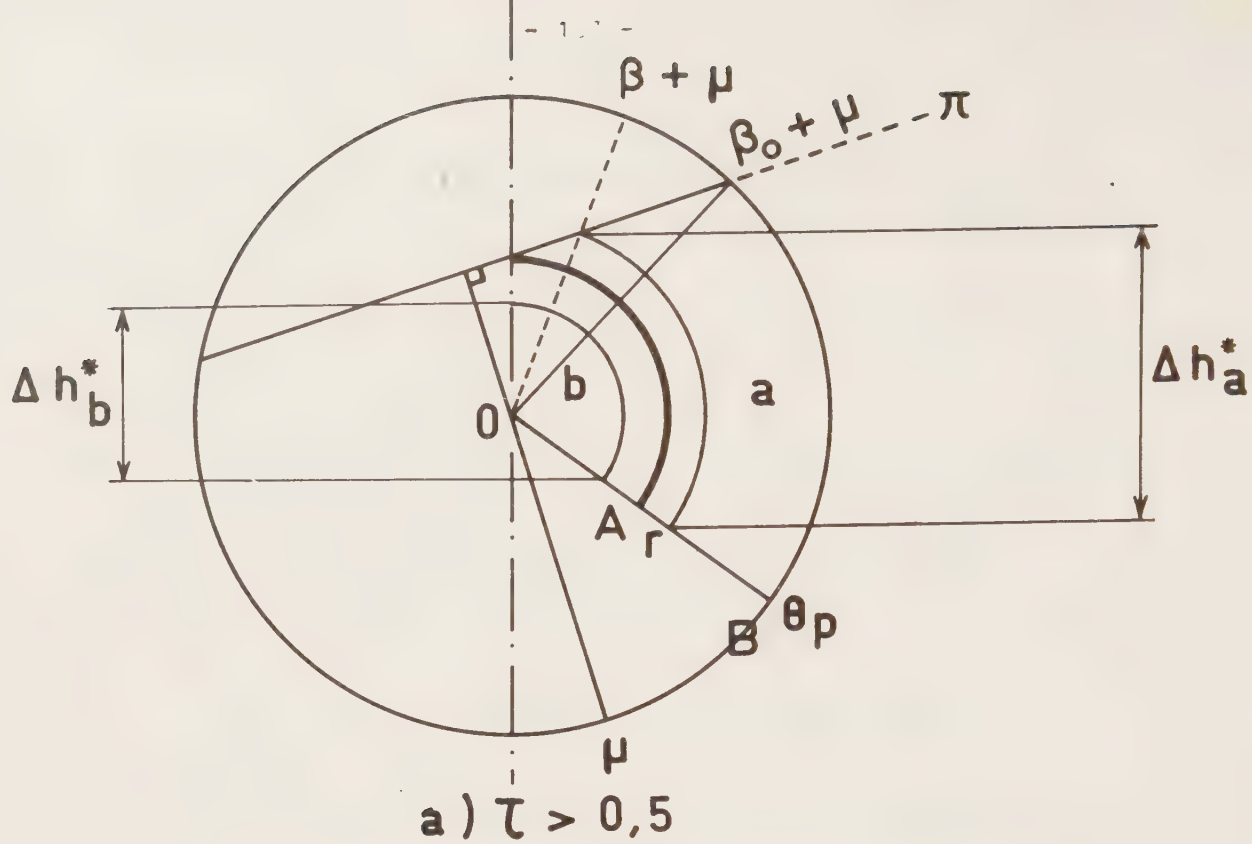


Fig . A-1

d'où l'expression du couple par unité de longueur qui s'exerce sur l'élément dr de la pale par suite de la pression qui y règne :

$$dC_{ga}^* = \rho g r (r \cos \theta_p + h_o \cos \mu + \sin \mu \sqrt{r^2 - h_o^2}) dr \quad A - 6$$

Le couple s'exerçant sur la partie AB est donné alors par :

$$C_{ga}^* = \int_{\frac{h_o}{\cos \mu}}^R dC_{ga}^* \quad A - 7$$

L'intégration de l'équation A - 7 conduit à :

$$C_{ga}^* = \rho g \left\{ \begin{aligned} & \frac{\cos \theta_p}{3} \left(R^3 - \frac{h_o^3}{\cos^3 \mu} \right) \\ & + \frac{h_o}{2} \cos \left(R^2 - \frac{h_o^2}{\cos^2 \mu} \right) \\ & + \frac{\sin \mu}{3} \left\{ (R^2 - h_o^2)^{3/2} - \left(\frac{h_o^2}{\cos^2 \mu} - h_o^2 \right)^{3/2} \right\} \end{aligned} \right. \quad A - 8$$

A - 1 - 2 Calcul du couple C_{gb}^* exercé sur OA

De la même manière que précédemment, on a :

$$P = \rho g \Delta h_b^* = \rho g (r \cos \theta_p + r) \quad A - 9$$

$$\text{donc : } dC_{gb}^* = \rho g r^2 (\cos \theta_p + 1) dr \quad A - 10$$

$$\text{et } C_{gb}^* = \int_0^{\frac{h_o}{\cos \mu}} dC_{gb}^* = \frac{\rho g h_o^3}{3 \cos^3 \mu} (\cos \theta_p + 1) \quad A - 11$$

L'expression du couple total exercé sur la pale par les forces de pression s'écrit donc :

$$C_g^* = \rho g \left\{ \begin{aligned} & 1/3 \left(R^3 \cos \theta_p + \frac{h_o^3}{\cos^3 \mu} \right) \\ & + \frac{h_o}{2} \cos \mu \left(R^2 - \frac{h_o^2}{\cos^2 \mu} \right) \\ & + \frac{\sin \mu}{3} \left[(R^2 - h_o^2)^{3/2} - \left(\frac{1}{\cos^2 \mu} - 1 \right)^{3/2} \right] h_o^3 \end{aligned} \right. \quad A - 12$$

Remplaçons h_o par sa valeur : $h_o = -R \cos \beta_o$, il vient :

$$C_g^* = \frac{\rho g R^3}{3} \left\{ \begin{aligned} & \cos \theta_p - \frac{\cos^3 \beta_o}{\cos^3 \mu} \\ & - \frac{3}{2} \cos \beta_o \cos \mu \left(1 - \frac{\cos^2 \beta_o}{\cos^2 \mu} \right) \\ & + \sin \mu \left[(1 - \cos^2 \beta_o)^{3/2} + \operatorname{tg}^3 \mu \cos^3 \beta_o \right] \end{aligned} \right. \quad A - 13$$

qui s'écrit encore, en tenant compte de :

$$(1 - \cos^2 \beta_o)^{3/2} = \sin \beta_o - \sin \beta_o \cos^2 \beta_o$$

et en regroupant les termes qui apparaissent dans l'équation VI - 7 :

$$C_g^* = \frac{\rho g R^3}{3} \left\{ \begin{aligned} & \cos \theta_p - \cos \beta_o \cos \mu + \sin \mu \sin \beta_o \\ & - \cos^3 \beta_o \left(\frac{\cos \mu}{2 \cos^2 \beta_o} - \frac{1}{2 \cos \mu} + \sin \mu \operatorname{tg} \beta_o \right) \\ & - \cos^3 \beta_o \left(\frac{1}{\cos^3 \mu} - \frac{1}{\cos \mu} + \sin \mu \operatorname{tg}^3 \mu \right) \end{aligned} \right. \quad A - 14$$

L'équation A - 14 est identique à l'équation VI - 7 puisque :

$$\frac{1}{\cos^3 \mu} - \frac{1}{\cos \mu} + \sin \mu \operatorname{tg}^3 \mu = \frac{\sin^2 \mu}{\cos \mu} \quad \text{A - 15}$$

On a en effet :

$$\frac{1}{\cos^3 \mu} (1 - \cos^2 \mu - \sin^4 \mu) = \frac{\sin^2 \mu - \sin^4 \mu}{\cos^3 \mu} = \frac{\sin^2 \mu (1 - \sin^2 \mu)}{\cos \mu (1 - \sin^2 \mu)} = \frac{\sin^2 \mu}{\cos \mu}$$

Le couple exercé sur la pale par les forces de pression selon l'analogie hydrostatique proposée est donc identique au couple calculé à l'aide du modèle du lit rigide :

VI - 7

$$C_g^* = \frac{\rho g R^3}{3} \left(\cos \theta_p - \cos(\beta_o + \mu) - \cos^3 \beta_o \left(\frac{\cos \mu}{2 \cos^2 \beta_o} + \sin \mu \operatorname{tg} \beta_o - \frac{1}{2 \cos \mu} + \frac{\sin^2 \mu}{\cos \mu} \right) \right)$$

A - 2 CAS DES REMPLISSAGES INFÉRIEURS A LA MOITIE

Quand θ_p est supérieur ou égal à μ , tout le lit en aval exerce une pression sur la pale et les résultats restent analogues à ceux obtenus dans le chapitre VI ; mais quand θ_p est inférieur à μ , la contribution de la partie du lit correspondant au segment cylindrique hachuré de la figure A - 1 - b se trouve négligée lors de l'intégration ; dans ces conditions, l'expression obtenue diffère de celle relative au modèle du lit rigide.

En effet, calculons, dans ces conditions, le couple instantané dû aux forces de pression exercées sur le lit ; nous avons comme dans le cas précédent :

$$P = \rho g r (\cos \theta_p - \cos(\beta + \mu))$$

$$\text{avec} \quad \cos \beta = \frac{h_o}{r} = \frac{R \cos \beta_o}{r} \quad \text{A - 16}$$

D'où :

$$dC_g^* = \rho g \left(\cos \theta_p r^2 dr - R \cos \mu \cos \beta_o r dr + \sin \sqrt{r^2 - R^2} \cos^2 \beta_o r dr \right) \quad \text{A - 17}$$

$$\text{et } C'_g = \int_{\frac{R \cos \beta_o}{\cos(\theta_p - \mu)}}^R dC_g$$

L'intégration de cette équation conduit dans le cas général à l'expression :

$$C_g = \rho g R^3 \left\{ \begin{aligned} & \frac{\cos \theta_p}{3} \left(1 - \frac{\cos^3 \beta_o}{\cos^3(\theta_p - \mu)} \right) \\ & - \frac{\cos \mu \cos \beta_o}{2} \left(1 - \frac{\cos^2 \beta_o}{\cos^2(\theta_p - \mu)} \right) \\ & + \frac{\sin \mu}{3} \left(\sin^3 \beta_o - \cos^3 \beta_o \left| \text{tg}^3(\theta_p - \mu) \right| \right) \end{aligned} \right. \quad \text{A - 18}$$

qui s'écrit encore :

$$C_g = \frac{\rho g R^3}{3} \left\{ \begin{aligned} & \cos \theta_p - \cos(\beta_o + \mu) \\ & - \cos^3 \beta_o \left(\frac{\cos \mu}{2 \cos^2 \beta_o} + \sin \mu \text{tg} \beta_o - \frac{\cos \mu}{2 \cos^2(\theta_p - \mu)} - \sin \mu \text{tg}(\theta_p - \mu) \right) \\ & - \cos^3 \beta_o \left(\sin \left| \text{tg}^3(\theta_p - \mu) \right| + \sin \mu \text{tg}(\theta_p - \mu) + \frac{\cos \theta_p}{\cos^3(\theta_p - \mu)} - \frac{\cos \mu}{\cos^2(\theta_p - \mu)} \right) \end{aligned} \right. \quad \text{A - 19}$$

L'équation A-19 diffère de VI - 5 par la présence du dernier terme. Si l'on tient compte de l'égalité trigonométrique :

$$\sin \mu \text{tg}^3(\theta_p - \mu) = \frac{\cos \mu}{\cos^2(\theta_p - \mu)} - \frac{\cos \theta_p}{\cos^3(\theta_p - \mu)} - \sin \mu \text{tg}(\theta_p - \mu) \quad \text{A - 20}$$

on constate qu'il est annulé pour $\theta_p > \mu$ puisque :

$$\left| \text{tg}^3(\theta_p - \mu) \right| = \text{tg}^3(\theta_p - \mu)$$

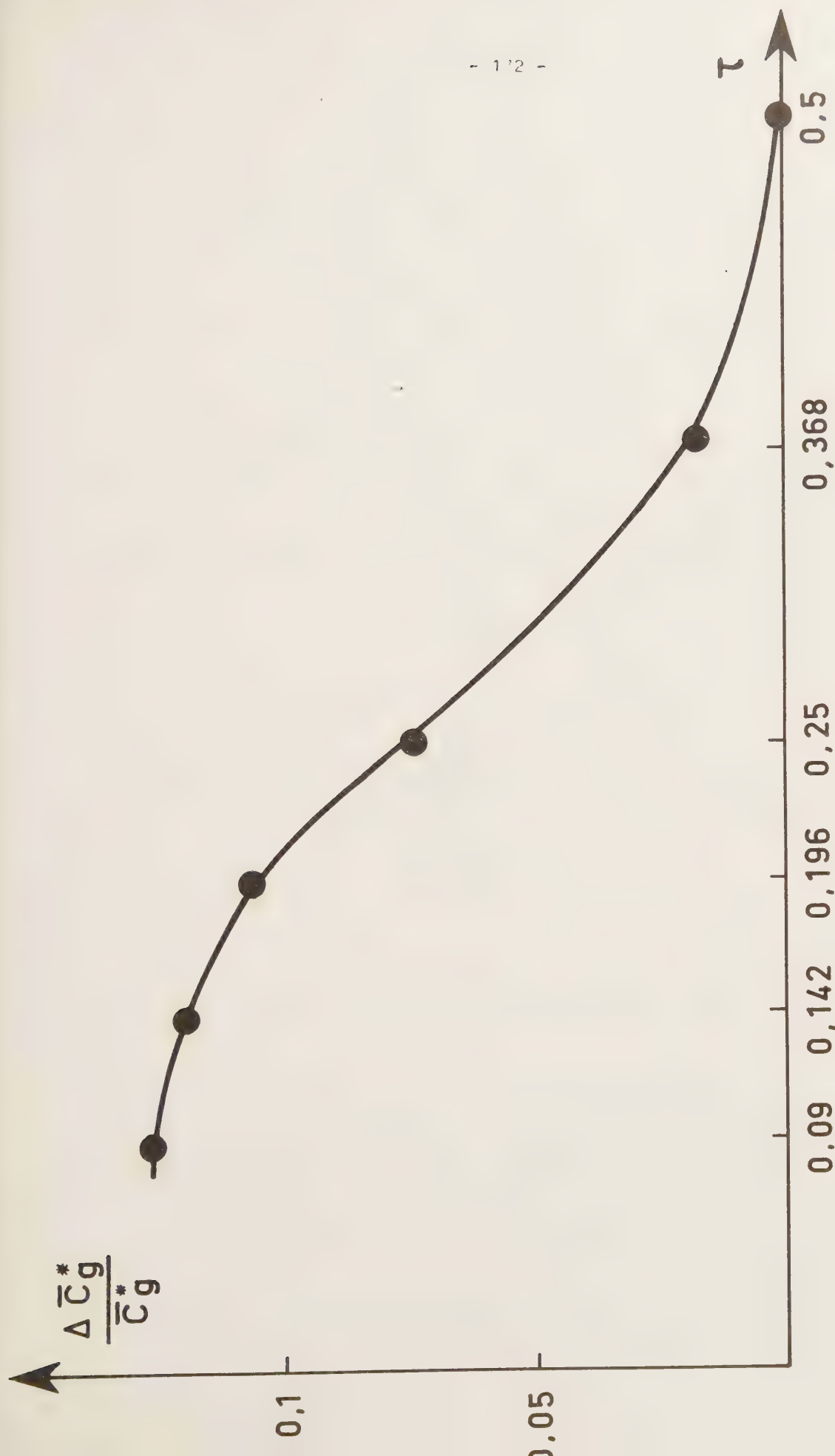


Fig. A-2 . Erreur introduite par l'analogie hydrostatique proposée .

Par contre, pour $\theta_p < \mu$, on a :

$$\left| \operatorname{tg}^3 (\theta_p - \mu) \right| = \operatorname{tg}^3 (\mu - \theta_p) = - \operatorname{tg}^3 (\theta_p - \mu)$$

et le dernier terme de A - 19 n'est plus nul ; il vaut :

$$- \frac{2 \rho g R^3}{3} \cos^3 \beta_o \sin \mu \operatorname{tg}^3 (\mu - \theta_p) \quad A - 21$$

Pour $\theta_p < \mu$, le couple instantané déduit de l'analogie hydrostatique est donc inférieur au couple calculé par le modèle du solide rigide. On peut montrer que le module de A-21 n'est autre que l'expression du moment par rapport à O du secteur hachuré sur la figure A - 1 - b ; dans l'analyse hydrostatique, sa contribution se trouve évidemment négligée.

L'erreur sur le couple instantané est donc :

$$\Delta C_g^* = \frac{2 \rho g R^3}{3} \cos^3 \beta_o \sin \mu \operatorname{tg}^3 (\mu - \theta_p) \quad A - 22$$

Elle s'annule pour $\theta_p = \mu$. L'erreur introduite sur le couple moyen s'en déduit : si θ_{pm} désigne l'angle à partir duquel la pale devient motrice, on a en effet :

$$\begin{aligned} \Delta \bar{C}_g^* &= \frac{2}{\pi} \int_{\theta_{pm}}^{\mu} C_g^* d\theta_p = \\ &= \frac{\rho g R^3}{3} \sin \mu \cos^3 \beta_o \left\{ \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 (\mu - \theta_{pm}) + \ln \cos (\mu - \theta_{pm}) \right\} \end{aligned}$$

θ_{pm} varie de $\theta_1 - \frac{\pi}{2}$ (§ VI-3) à $-\beta_o + \mu$ pour les taux de remplissage faibles. En supposant que, pour τ^* , c'est-à-dire $\beta_o = \frac{\pi}{4} + \mu + \epsilon$, θ_{pm} reste voisin de $-\frac{\pi}{4}$ ainsi qu'on l'a fait au paragraphe VI - 3, on a calculé l'erreur relative introduite par l'analogie hydrostatique en fonction du taux de remplissage. Les résultats rassemblés sur la figure A - 2 montrent qu'elle reste faible.

En conclusion, l'analyse hydrostatique que nous venons de décrire constitue une méthode valable pour le calcul du couple.

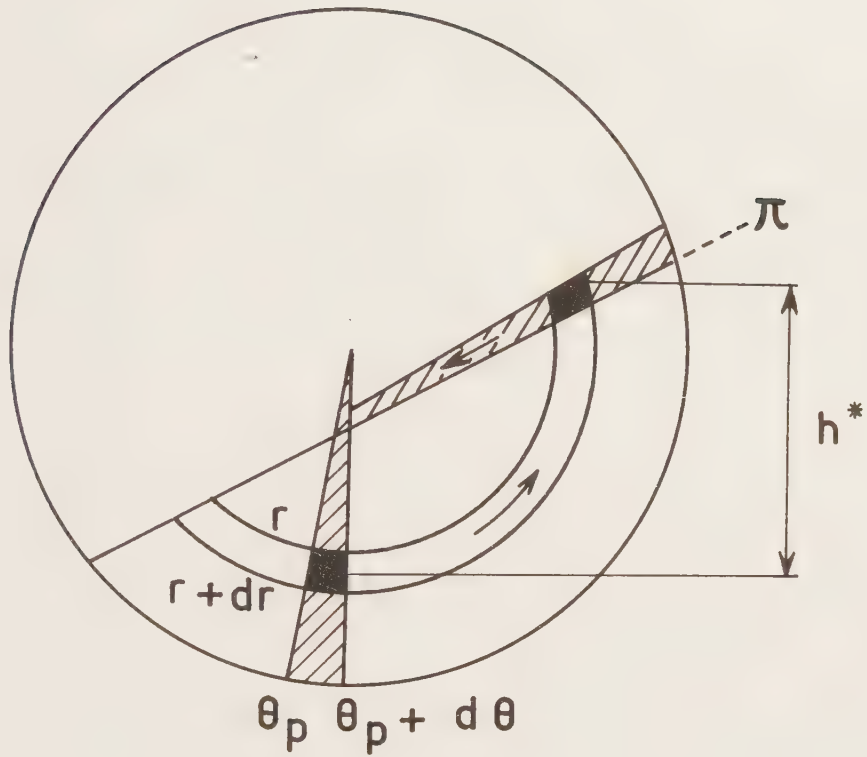


Fig . A-3 .

A - 3 REMARQUE

L'analogie hydrostatique qui est développée ci-dessus, permet dans le cadre de notre travail d'introduire comme en mécanique des sols un coefficient de poussée qui tient compte des forces de frottement pour le calcul du couple réel. En fait elle se justifie physiquement ; en effet, étant donné que la forme du lit est sensiblement constante, lorsqu'une pale motrice se déplace de la position θ_p à $\theta_p + d\theta$, tout se passe comme si le volume hachuré dans la figure A - 3 se trouvant auparavant en son contact traverse le niveau du plan π par une trajectoire circulaire puis redescend derrière la pale sans restituer son énergie ; le reste du lit demeurant immobile. Dans ces conditions, le travail fournit au volume élémentaire $dv = r dr d\theta$ pendant la rotation de $d\theta$ de la pale est donc $\rho g h^* dv$ qui correspond bien au travail contre les forces de pression $\sigma_2^* dv$ dans le fluide isotrope.

B - REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- (A1) ASHTON M.D., FARLEY et VALENTIN F.H.H.
J. Sci. Instrum., 1964, 41, (12), 763.
- (A2) AVRIL et les ingénieurs de la BUDD S.A.
Manuel d'analyse des contraintes Ed. BUDD S.A., 1967.
- (B1) BROWN R.L.
Nature, 191, 191, 458.
- (B2) BROWN R.L. et RICHARDS J.C.
Principles of powder mechanics, Ed. Pergamon Press, 1970.
- (B3) BROWN R.L. et RICHARDS J.C.
Trans. Instn. Chem. Engrs., 1960, 38, 243.
- (B4) BROWN R.L. et RICHARDS J.C.
Trans. Instn. Chem. Engrs., 1959, 57, 108.
- (B5) BROTHMAN A., WOLLAN G.N. et FELDMAN S.M.
Chem. and Met. Eng., 1945, 52, 102.
- (B6) BRIDGWATER, SHARPE et STOCKER.
Trans. Instn. Chem. Engrs., 1967, 47, 114.
- (B7) BAGSTER.
Powder technology, 1970, 3, (1), 153.
- (B8) BARTH.
Techn. Mechanik und Thermodynamik, 1930, 1, 321.
- (B9) BATES L.
Brit. Chem. Eng., 1969, 14, 1072.

- (C1) CARR R.L.
Chem. Eng., 1969, 13, (10), 7.
- (C2) COULOMB
Mémoires de Savants Etrangers de l'Académie des Sciences de PARIS
1776.
- (C3) CARR J.F.
Nature, 1967, 213, 1158.
- (C4) CHENG
Chem. Engng. Sci., 1968, 23, 1405.
- (C5) CRAIK et MILLER
J. Pharm. Pharmacol., 1958, 10, 136.
- (C6) COULSON J.M. et MAITRA N.K.
Ind. Chemist., 1950, 26, 55.
- (C7) CAQUOT
Equilibre des massifs pulvérulents à frottement interne
2ème éd. Gauthier-Villars, PARIS, 1948.
- (C8) CAQUOT et KERISEL
Tables for the calculation of passive pressure, active pressure
and bearing capacity of foundations.
Ed. Gauthier-Villars, PARIS 1948.
- (D1) DOUGLASS A.G.
Nature, 1967, 215, 952.
- (D2) DONALD et ROSEMAN
Brit. Chem. Sci., 1966, 21, 749, 823 et 922.
- (F1) FOWLER R.T. et CHODZIESNER W.D.
Chem. Eng. Sci., 1969, w , 157

- (F2) FAN L.T., CHEN S.J. et WATSON C.A.
Ind. Eng. Chem., 1970, 62, (7), 53.
- (F3) FUERSTENAU
Powder Technology, 1969, 2 (5), 215.
- (G1) GARDNER
Chem. Eng. Sci., 1964, 19, 283.
- (G2) GARDNER
Chem. Eng. Sci., 1966, 21, 261.
- (G3) GRÈN U.
Brit. Chem. Eng., 1967, 12, 1733.
- (G4) GIBILARO, KRAPHOLLER et SPIKINS
Chem. Eng. Sci., 1967, 22, 517.
- (G5) GAYLE J.B. et GARY J.K.
Ind. Eng. Chem., 1960, 50, 519.
- (H1) HARWOOD C.F. et PILPEL N.
J. Pharm. Pharmacol., 1963, 21, 721.
- (H2) HVORSLEV
Über die Festigkeitseigenschaften gestörter bindiger Böden.
Danmarks Naturvidenskabelige Samfund.
Copenhagen, 1937.
- (H3) HVORSLEV
Ingeniorvidenskabelige Skrifter, 1937, A, 45.
- (H4) HAGG, CAHN, HEALY et FUERSTENAU
Chem. Eng. Sci., 1966, 21, 1025.
- (J1) JENIKE A.W. et JOHANSON
Chem. Eng. Progress, 1970, 66, (6), 31.

- (J3) JENIKE A.W., ELSEY et WOLLEY
Proc. Am. Soc. Test. Mater, 1960, 60, 1168.
- (J4) JENIKE A.W.
Trans. Instn. Chem. Engrs., 1962, 40, 264.
- (J5) JULOU et LE GOFF
Génie Chimique, 1969, 102, 973.
- (K1) KEEY
Brit. Chem. Engr., 1967, 12, 1081.
- (L1) LOWES et PERRY
Measurement of coehsion in powders.
Communication at the "Brit. Soc. Rheology meeting"
NOTTINGHAM, 1965.
- (L2) LLOYD P.J. et YEUNG P.C.M.
Chem. and Process. Eng., 1967, 48, 10), 57.
- (L3) LLOYD P.J., YEUNG P.C.M. et FRESHWATER
J. Soc. Cosmet. Chem., 1970, 21 (3), 205.
- (M1) McDOUGALL
Trans. Instn. Chem. Engrs., 1969, 47, 73.
- (M2) MORGAN
Nature, 1965, 205, 36.
- (M3) MUELLER W et RUMPF H.
Chem. Eng. Techn., 1967, 39, (5/6), 365.
- (M4) MUELLER W.
Chem. Eng. Techn., 1967, 39, (14), 851.
- (M5) MUELLER F.
Aufbereitungs Technik, 1966, 5, 274.

- (N1) NOVOSAD J.
Coll. Czechoslov. Chem. Comm., 1964, 29, 2697.
- (N2) NOVOSAD J.
Coll. Czechoslov. Chem. Comm., 1964, 29, 2681.
- (N3) NOVOSAD J.
Coll. Czechoslov. Chem. Comm., 1964, 29, 2702.
- (N4) NOVOSAD J et STANDART
Coll. Czechoslov. Chem. Comm., 1965, 30, 3247.
- (N5) NOVOSAD J.
Coll. Czechoslov. Chem. Comm., 1968, 33, 4164.
- (N6) NEBBENSKY J.
Coll. Czechoslov. Chem. Comm., 1966, 31, 3960.
- (O1) OYAMA Y.
Bull. Inst. Phys., Chem. Research (Tokyo) rept. 7.
1940, 19 (8), 1088
- (O2) OLDSHUE J.Y.
Ind. Eng. Chem., 1970, 62 (11), 44.
- (P1) PILPEL
Brit. Chem. Eng., 1966, 2, 699.
- (P2) PILPEL
J. Pharm. Pharmacol., 1964, 16, 705.
- (P3) PENNEY W.R.
Chem. Eng., 1970, 12, (77), 171.
- (Q1) QUIROZ R et RONCO J.J.
Génie Chimique, 1968, 99, 500.

- (R1) RANKINE
On the stability of loose earth.
Phil. Trans. Roy. Soc. Lond., 1857, 147, 9.
- (R2) REIMBERT M. et REIMBERT A.
Silos : Traité théorique et pratique.
Ed. Paris-Eyrolles, 1961.
- (R3) ROSE H.E. et TANAKA T.
Geotechnique, 1958, 8, 22.
- (R5) RIES H.B.
Aufbereitungs Technik, 1969, 10, 1.
- (R6) ROSE H.E.
Trans. Instn. Chem. Engrs., 1959, 37, 48.
- (R7) ROSE H.E. et SULLIVAN R.
A treatise of the internal mechanics of ball, rod and tube Mills
Ed. Constable, LONDRES, 1957.
- (R8) RONCO J.J., SANTIAGO et PERINA
Génie Chimique, 1962, 88, 108.
- (R9) RONCO J.J., SANTIAGO et PERINA
Génie Chimique, 1964, 91, 110.
- (R 10) ROSENBROCK
Computer Journal, 1960, 3, (10), 175.
- (S1) SOKOLOVSKII
Statics of granular Media. Pergamon Press, Oxford, 1965.
- (S2) SCOTT
Principles of soil mechanics
Addison Wesley Reading. Mass., 1963.

- (S3) SCOTT
Nature, 1960, 188, 908.
- (S4) SCOTT
Nature, 1964, 194, 956.
- (S5) SHOOK, CARLETON et FLAIN
Trans. Instn. Chem. Engrs., 1970, 48, 173.
- (S6) SMALLEY V. et SMALLEY J.J.
Nature, 1964, 202, 168.
- (S7) STANGE K.
Chem. Eng. Techn., 1967, 39, (9/10), 585.
- (T1) TERZAGHI
Theoretical Soil Mechanics, Ed. J. WILLEY, New-York, 1944.
- (T2) TERZAGHI et PECK
Mécanique des sols appliquée, traduit par BAUDRILLARD et MEUNIER, DUNOD, Paris, 1965.
- (T3) TRAIN
J. Pharm. Pharmacol., 1958, 10, 127 T et 144 T.
- (T4) TAUSK et STERBACEK
Mixing in the chemical industry, Pergamon Press, 1965.
- (V1) VALENTIN F.H.H.
Chem. End. Process Eng., 1965, 46, (4), 181.
- (V2) VAVRA
Génie Chimique, 1970, 103, 358.
- (W1) WALKER et BLANCHARD
Chem. Eng. Sci., 1967, 22, 1713.

- (W2) WILLIAMS J.C.
Chem. End. Process Eng., 1965, 46, (4), 173.
- (W3) WILLIAMS J.C. et BIRKS
Rheologica Acta, 1965, 4, (10), 170.
- (W4) WILLIAMS J.C. et BIRKS
Powder Technology, 1967, 1 (4), 199.
- (W5) WILLIAMS J.C.
Powder Technology, 1968, 2 (9), 13.
- (W6) WILLIAMS J.C.
Review of Research in School of Powder Technology in the
University of Bradford.
Symp. Organiser : The London and South Eastern Branch of the
Institution of Chemical Engineering, Mars 1969.
- (W7) WEYDANZ
Chem. Ing. Techn., 1960, 32, (5), 343.
- (W8) WEIDENBAUM
Advances in Chemical Engineering, tome II
Academic Press, New-York, 1958.
- (W9) WILDE
Méthode de recherche d'un optimum. DUNOD, Paris, 1966.
- (Z1) ZIMMERMAN O.T.
Cost. Chem., 1969, 14 (4).

Vu

Les membres du jury :

MM. C. EYRAUD

B. LESPINASSE

J.C. CUBAUD

M. RIOU

Vu et approuvé

Le Directeur de l'U.E.R.
de Chimie-Biochimie

D. GAUTHERON

Vu et accordé le permis d'imprimer
LYON, le 21 Avril 1971

Le Président de l'Université
Claude Bernard

J. BOIDIN

